Entrance Examination 1991-92

MECCANICA QUANTISTICA

a) Considerare l' operatore di Schroedinger

$$H \equiv -1/2d^2/dx^2 + x^2/2 + e^x - 1/2$$

a) Dimostrare che valgono le seguenti stime per i primi due autovalori:

$$E_0 \leq 2e^{1/4} \qquad E_1 \leq 1/2 + (1+\sqrt{2}/4)e^{1/4}.$$

b) Dimostrare che la risolvente di H é un operatore di Hilbert-Schmidt.

MECCANICA CLASSICA

a) Per un sistema Lagrangiano in R^n una riduzione ad un sistema in R^{n-p} puó avvenire in due modi: attraverso vincoli olonomi bilateri o utilizzando le identitá che conseguono dall' esistenza di costanti del moto. Il primo procedimento porta sempre a sistemi Lagrangiani, il secondo non ha in generale questa proprietá. Illustrare brevemente questo, esemplificando su due sistemi che si ritengono semplici e significatvi.

b) Illustrare alcune proprietá del moto centrale attraverso la soluzione del problema seguente:

Un punto materiale in R^3 interagisce con l' origine attraverso una forza che é la somma di una forza conservativa di potenziale $|x|^{-k}$ e di una forza dissipativa $F_{diss} = -\alpha\dot{x}$. Considerare i casi $k = 1$ $\alpha > 0$ e $k \geq 2$, $\alpha = 0$. Nel primo caso, si dimostri che l'origine e' un attrattore (si suggerisce di considerare le superfici di energia cosatante per il caso $\alpha = 0$ Nel secondo caso, in corrispondenza a dati iniziali per i quali il punto materiale cade verso il centro, si dica se il punto materiale fara' un numero finito o infinito di rivoluzioni attorno al centro.

TEORIA DEI CAMPI CLASSICI

a) Dimostrare che il campo magnetico definito in $R^3 - \{0\}$ dalla formula

$$B = \frac{x}{4\pi|x|^3}$$

ha divergenza nulla ma non ammette potenziale vettoriale.

Dimostare anche che se la stessa formula definisce B su

$$R^3 - \{x_2 = x_3 = 0, x_1 \geq 0\}$$

allora B ammette un potenziale vettoriale A e determinare una possibile scelta per A . Inquadrare brevemente questi risultati in un contesto generale.

b) L' equazione di Poisson per l'elettrostatica in R^3 ammette una formulazione variazionale . Descriverla, e nel caso particolare in cui la densita' di carica e' invariante per rotazioni, utilizzare il Teorema di Noether per dimostare che la soluzione e' anch'essa invariante per rotazioni.

NOTA : Svolgere non piu' di tre dei sei esercizi proposti.