Entrance Examination 1994-95

Svolgere a scelta uno dei seguenti temi d'esame, discutendo in dettaglio gli esempi concreti richiesti:

1) Un corpo rigido con asse di simmetria (ad esempio un cubo omogeneo) che si muove nell spazio è un sistema completamente integrabile che ammette un "grosso" gruppo di simmetrie.

Discutere, alla luce di questo esempio, il ruolo delle simmetrie e della completa integrabilià in meccanica.

2) Discutere la classificazione delle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine utilizzando gli esempi classici della fisica matematica.

3) Si derivino le espressioni per l'energia media $\bar{E}$, l'energia quadratica media $\bar{E}^2$ e la fluttazione quadratica media $\bar{\Delta}E^2$, $(\Delta E = E - \bar{E})$ per un sistema (microscopico o macroscopico) in contatto con un bagno termico a temperatura T. Si applichino i risultati ottenuti al caso dell'oscillatore armonico e al caso di una collezione di N oscillatori armonici identici. Si discutano i risultati.

4) Si consideri l'operatore:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 + \gamma \sin |x|$$

definito sulle funzioni due volte differenziabili di $\mathbf{R}$ a supporto compatto. γ è un parametro reale che soddisfa $|\gamma| < 1/2$.

L'operatore H è chiudibile come operatore su $L^2(\mathbf{R}, dx)$ e la sua chiusura $\bar{H}$ è un operatore autoaggiunto.

Dimostrare che lo spettro di $\bar{H}$ è puntuale, e determinare il comportamento asintotico degli autovalori λ_n per n grande e la dimensione del sottospazio corrispondente ai primi n autovalori.

Dimostrare inoltre che per β sufficientemente grande, l'operatore $(\bar{H} + \beta I)^{-1}$ è un operatore di Hilbert–Schmidt.

Per quali altri valori del numero complesso z l'operatore $(\bar{H} + zI)^{-1}$ è di Hilbert–Schmidt?

Utilizzando la simmetria della funzione $\sin |x|$ è possibile estendere i risultati precedenti al caso $\gamma < 1$?.

Facoltativo

Dimostrare l'affermazione fatta qui sopra secondo cui H è chiudibile e che la sua chiusura è un operatore autoaggiunto.