• Si considerino gli spazi $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, con la loro topologia standard.

(i) Dimostrare con metodi elementari che se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ è un'applicazione continua e iniettiva, $f(\mathbf{R})$ non può essere aperto in $\mathbf{R}^2$.

(ii) Mostrare un esempio di un'applicazione continua e iniettiva $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ tale che $f(\mathbf{R})$ dotato della topologia relativa non sia omeomorfo a $\mathbf{R}$.

(iii) Più in generale, dimostrare che se esiste un omeomorfismo $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ allora $m = n$.

• Dopo aver brevemente esposto i fondamenti della teoria di Hamilton-Jacobi, si risolva il seguente esercizio.

Lo spazio delle configurazioni di un sistema meccanico è diffeomorfo a $\mathbf{R}^n$. Si sa che la funzione

$$S(q^1, \ldots, q^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t) = e^{-\beta t} \sum_{i=1}^{n} q^i \, \alpha_i$$

verifica l'equazione di Hamilton-Jacobi (β è una costante reale, e le quantità $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono costanti di integrazione).

(i) Scrivere la funzione hamiltoniana del sistema come funzione delle variabili (q, p).

(ii) Si risolva adesso l'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione hamiltoniana così ottenuta per separazione di variabili additiva; confrontare con la funzione S.

(iii) Trovare una soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi dove la variabili $q_1, \ldots, q_n$ non sono separate.

(iv) Si verifichi che le varie soluzioni dell'equazione di Hamilton-Jacobi così ottenute sono costanti lungo le soluzioni delle equazioni del moto; addurre ragioni teoriche perché se una soluzione è costante anche le altre devono necessariamente esserlo.

• Una particella libera quantistica si muove liberamente sull'asse reale tra due pareti poste a $-\frac{\pi}{2}$ e a $\frac{\pi}{2}$ con condizioni di rimbalzo alle pareti (condizioni di Neumann). Si utilizzino unità di misura in cui $m = h/2\pi = 1$.

All'istante iniziale ($t = 0$) la configurazione è descritta dalla funzione d'onda

$$\phi_0(x) = \sqrt{\frac{1-\epsilon^2}{\pi}} + \epsilon \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\, x$$

Al tempo $t_1 = \pi$ le pareti vengono improvvisamente tolte e il punto materiale si muove da allora in poi liberamente sull'intera retta reale. Al tempo $t_2 = t_1 + 1$ viene effettuata una misurazione di posizione.

Dare la probabilitá che il risultato numerico della misurazione sia compreso fra $-\pi/2$ e $\pi/2$.

• Nello spazio-tempo di Minkowski M^4 si consideri un riferimento R_ω uniformemente ruotante. Si descriva la geometria spazio-temporale in R_ω e in particolare si determini la metrica g^2_ω nel piano bidimensionale π_ω solidale con R_ω e ortogonale all'asse di rotazione. Si dimostri che la geometria (π_ω, g^2_ω) così ottenuta è isometrica a quella di una superficie a curvatura costante negativa.