SISSA ISAS
SCUOLA INTERNAZIONALE SUPERIORE DI STUDI AVANZATI - INTERNATIONAL SCHOOL FOR ADVANCED STUDIES
I-34014 Trieste ITALY - Via Beirut 4 - Tel. [+]39-40-37871 - Telex:460269 SISSA I - Fax: [+]39-40-3787528

Mathematical Physics Sector

Entrance examination 2000–2001

The candidate is asked to solve at least one of the following exercises.

1

A mechanical particle with mass m is constrained on a sphere of unit radius.

a) Assuming that the gravitational force in absent, describe the motion in Lagrangian formalism. Give an explicit expression of two one-parameter groups of symmetry and of the corresponding conserved momenta. Turning to the Hamiltonian formalism, give an explicit expression of two first integrals in involution.

b) In presence of the gravitational force, find the equilibrium positions and discuss their stability.

2

A quantum particle of mass m is constrained to a sphere of unit radius.

a) In the absence of gravitational force, after choosing a Hilbert space to describe the system, write explicitly the Hamiltonian and the generators of two one-parameter groups of unitary operators which describe symmetries of the system. Prove that the Hamiltonian is a self-adjoint operator and discuss its spectral structure

b) In the presence of gravitational force, prove that the Hamiltonian is self-adjoint and that it has a completely point spectrum. Determine, at first order in the gravitational force, the energy of the ground state and its eigenfunction.

3

a) Give the definition of the first homotopy group (fundamental group) of a topological space.

b) Introduce the notion of deformation retract and show that if a space is a deformation retract of another, then the two spaces have the same fundamental group.

c) Compute the fundamental group of a cartesian product in terms of the fundamental groups of the factors.

d) Compute the fundamental groups of the following spaces:

d1) $\mathbf{R}^3 - Z$, where Z is the z axis.

d2) The torus $T^2 = S^1 \times S^1$.

d3) $\mathbf{R}^3 - (\gamma \cup Z)$ where γ is the circle of equations $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ (hint: look at this space as a cartesian product by considering a section by a half-plane bounded by the z axis).

4

Let $SO(3)$ be the group of 3×3 real orthogonal matrices with unit determinant, and $SU(2)$ the group of 2×2 complex unitary matrices with unit determinant.

a) Describe the topologies of the groups $SO(3)$ and $SU(2)$.

b) Explain how these groups are related.

c) Give an example of a physical system which is $SO(3)$-invariant and connect this invariance with the conservation of angular momentum.

d) Give an example of a field-theoretic system which is $SU(2)$-invariant but not $SO(3)$-invariant.

Let now $L_+^\uparrow$ be the proper orthocronous Lorentz group, and $SL(2, \mathbf{C})$ the group of 2×2 complex matrices with unit determinant.

e) Explain the relation between $L_+^\uparrow$ and $SL(2, \mathbf{C})$. In what does this situation differ from the one in questions a) and b) above?

5

a) Describe the classification of complex projective quadrics (degree two hypersurfaces in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$). For each of them, say whether it can contain two skew (=nonintersecting) lines and three pairwise skew lines.

b) Let L be a line in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$. Prove that a quadric Q contains L if and only if it contains three distinct points of L.

c) Let L_1, L_2, L_3 be three pairwise skew lines in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$. Prove that there is a unique quadric Q containing L_1, L_2, L_3, and that Q is smooth.

d) In the assumptions of c), let L_4 be another line in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$. Discuss how many lines M satisfy the following property: $M \cap L_i \neq \emptyset$ for $i = 1, \ldots, 4$. Hint: the result will depend on the position of L_4 with respect to Q.

e) How do the answers to questions b) ,c), d) change if we replace the complex numbers by the reals? By an algebraically closed field K?

Settore di Fisica Matematica

Esame di ammissione 2000–2001

Il/la candidato/a risolva almeno uno dei seguenti esercizi.

1

Un punto materiale di massa m è vincolato a trovarsi su di una sfera di raggio uno.

a) Supposta assente la forza peso, descrivere il moto in forma lagrangiana, dando in forma esplicita i generatori di due gruppi ad un parametro di simmetrie ed i corrispondenti momenti conservati. Passando al formalismo hamiltoniano, date in forma esplicita due integrali primi in involuzione tra loro.

b) In presenza di forza peso, determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

2

Una particella quantistica di massa m è vincolata a una sfera di raggio unitario.

a) supposta assente la forza di gravità, scegliere lo spazio di Hilbert in cui si descrive il sistema, e scrivere in forma esplicita l'hamiltoniano e i generatori di due gruppi ad un parametro di operatori unitari che descrivono simmetrie del sistema.

b) In presenza della forza peso, dimostrare che l'hamiltoniano è autoaggiunto e che il suo spettro è completamente puntuale. Determinare, al primo ordine della forza peso, l'energia dello stato fondamentale e la sua autofunzione.

3

a) Dare la definizione di primo gruppo di omotopia (gruppo fondamentale) di uno spazio topologico.

b) Introdurre la nozione di ritratto di deformazione e mostrare che se uno spazio è un ritratto di deformazione di un altro, allora i due spazi hanno lo stesso gruppo fondamentale.

c) Calcolare il gruppo fondamentale di un prodotto cartesiano in termini dei gruppi fondamentali dei fattori.

d) Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti spazi:

d1) $\mathbf{R}^3 - Z$, dove Z è l'asse z.

d2) Il toro $T^2 = S^1 \times S^1$.

d3) $\mathbf{R}^3 - (\gamma \cup Z)$ dove γ è la circonferenza di equazioni $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ (suggerimento: vedere questo spazio come un prodotto cartesiano considerando una sezione per un semipiano limitato dall'asse z).

4

Sia $SO(3)$ il gruppo delle matrici reali ortogonali 3×3 con determinante unitario, e $SU(2)$ il gruppo delle matrici 2×2 complesse unitarie con determinante unitario.

a) Descrivere le topologie dei gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$.

b) Spiegare che relazione esiste fra i due gruppi.

c) Dare un esempio di un sistema fisico $SO(3)$-invariante e mettere in relazione questa invarianza con la conservazione del momento angolare.

d) Dare un esempio di un sistema di campi che sia $SU(2)$-invariante ma non $SO(3)$-invariante.

Sia adesso $L_+^\uparrow$ il gruppo di Lorentz proprio ortocrono, e $SL(2, \mathbf{C})$ il gruppo delle matrici complesse 2×2 con determinante unitario.

e) Spiegare la relazione fra $L_+^\uparrow$ e $SL(2, \mathbf{C})$. In che cosa questa situazione differisce da quella nelle domande a) e b)?

5

a) Descrivere la classificazione delle quadriche proiettive complesse (ipersuperfici di grado due in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$). Per ogni tipo, dire se esse possono contenere due rette sghembe (ovvero, che non si intersecano) e tre rette sghembe due a due.

b) Sia L una retta in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$. Provare che una quadrica Q contiene L se e solo se contiene tre punti distinti di L.

c) Siano L_1, L_2, L_3 tre rette in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, sghembe due a due. Provare che c'è un'unica quadrica Q che contiene L_1, L_2, L_3, e che Q è liscia.

d) Sotto le ipotesi di c), sia L_4 un'altra retta in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$. Discutere quante rette M soddisfano la proprietà $M \cap L_i \neq \emptyset$ per $i = 1, \ldots, 4$. Suggerimento: il risultato dipende dalla posizione di L_4 rispetto a Q.

e) Come cambiano le risposte a b) ,c), d) se i numeri complessi vengono sostituiti con i reali? E con un corpo K algebricamente chiuso?