Settore di Fisica Matematica

Esame di ammissione 2000–2001

Il/la candidato/a risolva almeno uno dei seguenti esercizi.

1

Un punto materiale di massa m è vincolato a trovarsi su di una sfera di raggio uno.

a) Supposta assente la forza peso, descrivere il moto in forma lagrangiana, dando in forma esplicita i generatori di due gruppi ad un parametro di simmetrie ed i corrispondenti momenti conservati. Passando al formalismo hamiltoniano, date in forma esplicita due integrali primi in involuzione tra loro.

b) In presenza di forza peso, determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

2

Una particella quantistica di massa m è vincolata a una sfera di raggio unitario.

a) supposta assente la forza di gravità, scegliere lo spazio di Hilbert in cui si descrive il sistema, e scrivere in forma esplicita l'hamiltoniano e i generatori di due gruppi ad un parametro di operatori unitari che descrivono simmetrie del sistema.

b) In presenza della forza peso, dimostrare che l'hamiltoniano è autoaggiunto e che il suo spettro è completamente puntuale. Determinare, al primo ordine della forza peso, l'energia dello stato fondamentale e la sua autofunzione.

3

a) Dare la definizione di primo gruppo di omotopia (gruppo fondamentale) di uno spazio topologico.

b) Introdurre la nozione di ritratto di deformazione e mostrare che se uno spazio è un ritratto di deformazione di un altro, allora i due spazi hanno lo stesso gruppo fondamentale.

c) Calcolare il gruppo fondamentale di un prodotto cartesiano in termini dei gruppi fondamentali dei fattori.

d) Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti spazi:

d1) $\mathbf{R}^3 - Z$, dove Z è l'asse z.

d2) Il toro $T^2 = S^1 \times S^1$.

d3) $\mathbf{R}^3 - (\gamma \cup Z)$ dove γ è la circonferenza di equazioni $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ (suggerimento: vedere questo spazio come un prodotto cartesiano considerando una sezione per un semipiano limitato dall'asse z).

4

Sia $SO(3)$ il gruppo delle matrici reali ortogonali 3×3 con determinante unitario, e $SU(2)$ il gruppo delle matrici 2×2 complesse unitarie con determinante unitario.

a) Descrivere le topologie dei gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$.

b) Spiegare che relazione esiste fra i due gruppi.

c) Dare un esempio di un sistema fisico $SO(3)$-invariante e mettere in relazione questa invarianza con la conservazione del momento angolare.

d) Dare un esempio di un sistema di campi che sia $SU(2)$-invariante ma non $SO(3)$-invariante.

Sia adesso $L_+^\uparrow$ il gruppo di Lorentz proprio ortocrono, e $SL(2, \mathbf{C})$ il gruppo delle matrici complesse 2×2 con determinante unitario.

e) Spiegare la relazione fra $L_+^\uparrow$ e $SL(2, \mathbf{C})$. In che cosa questa situazione differisce da quella nelle domande a) e b)?

5

a) Descrivere la classificazione delle quadriche proiettive complesse (ipersuperfici di grado due in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$). Per ogni tipo, dire se esse possono contenere due rette sghembe (ovvero, che non si intersecano) e tre rette sghembe due a due.

b) Sia L una retta in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$. Provare che una quadrica Q contiene L se e solo se contiene tre punti distinti di L.

c) Siano L_1, L_2, L_3 tre rette in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, sghembe due a due. Provare che c'è un'unica quadrica Q che contiene L_1, L_2, L_3, e che Q è liscia.

d) Sotto le ipotesi di c), sia L_4 un'altra retta in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$. Discutere quante rette M soddisfano la proprietà $M \cap L_i \neq \emptyset$ per $i = 1, \ldots, 4$. Suggerimento: il risultato dipende dalla posizione di L_4 rispetto a Q.

e) Come cambiano le risposte a b) ,c), d) se i numeri complessi vengono sostituiti con i reali? E con un corpo K algebricamente chiuso?