SISSA ISAS

SCUOLA INTERNAZIONALE SUPERIORE DI STUDI AVANZATI - INTERNATIONAL SCHOOL FOR ADVANCED STUDIES

I-34014 Trieste ITALY - Via Beirut 4 - Tel. [+]39-40-37871 - Telex:460269 SISSA I - Fax: [+]39-40-3787528

Mathematical Physics Sector

Entrance examination 2001/2002

The candidate is asked to solve at least one problem among the following.

1 Analytical mechanics

Consider in the phase space $\mathbb{R}^4$ the symplectic form

$$\omega = dx_1 \wedge dp_1 + dx_2 \wedge dp_2$$

and the corresponding Hamiltonian equations with Hamiltonian

$$H = p_1^2 + p_2^2 + U(r),\ U(r) = r^2 - r^6,\ \text{where } r^2 = x_1^2 + x_2^2\,.$$

1) Prove that the resulting system is completely integrable. Discuss the formulation of the problem in terms of action-angle variables, determining in particular the region in phase space where action-angle variables can be defined.

2) Find the equilibrium points both of the radial motion and of the complete system and discuss their stability.

3) Prove that the periodic orbits are dense in the region in phase space where the motion is bounded.

Settore di Fisica Matematica

Esame di ammissione 2001/2002

Il/La candidato/a risolva almeno uno dei seguenti esercizi.

Meccanica Analitica

Si consideri nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^4$ la forma simplettica

$$\omega = dx_1 \wedge dp_1 + dx_2 \wedge dp_2$$

e le corrispondenti equazioni di Hamiltonian con Hamiltoniana

$$H = p_1^2 + p_2^2 + U(r),\ U(r) = r^2 - r^6,\ \text{dove } r^2 = x_1^2 + x_2^2\,.$$

1) Dimostrare che tale sistema è completamente integrabile. Discutere la formulazione dello stesso nei termini di coordinate angolo-azione, e determinare in particolare la regione dello spazio delle fasi dove le coordinate angolo-azione possono essere definite.

2) Trovare i punti di equilibrio sia del moto radiale che del sistema completo e discuterne la stabilità.

3) Dimostare che le orbite periodiche sono dense nella regione dello spazio delle fasi dove il moto è limitato.

2 Partition Function in Statistical Mechanics

Consider a quantum system whose energy spectrum (in appropriate unit) is given by

$$E_n = \log n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Once the system is in contact with a heat reservoir at temperature β^{-1}, its canonical partition function is given by

$$Z(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\beta E_n\right] \quad . \tag{2}$$

1. Discuss the range of β such that $Z(\beta)$ is well–defined and identify the finite value β_c of β for which there is a singularity.

2. Show that for $\beta \to +\infty$, the mean value of the energy of the system behaves as

$$\langle E \rangle \sim \frac{1}{\beta} \tag{3}$$

3. Prove that, for those values of β for which $Z(\beta)$ is well–defined, it holds the identity

$$Z(\beta) = \prod_k \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^\beta}} \tag{4}$$

   where the above product is on all prime numbers p_k.

   Hint Remember that for $|x| < 1$, $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$.

4. Show that the existence of β_c implies that there are infinitely many primes.

Una Funzione di Partizione in Meccanica Statistica

Si consideri un sistema quantistico il cui spettro (in unità appropriate) è dato da

$$E_n = \log n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

Posto il sistema a temperatura β^{-1}, la sua funzione di partizione nell'ensemble canonico è data da

$$Z(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\beta E_n\right] \quad . \tag{6}$$

1. Discutere i valori di β per cui $Z(\beta)$ è definita e identificare il valore finito β_c per cui vi è una singolarità.

2. Mostrare che per $\beta \to +\infty$, il valor medio dell'energia del sistema va come

$$\langle E \rangle \sim \frac{1}{\beta} \tag{7}$$

3. Provare che per quei valori di β per cui $Z(\beta)$ è definita vale l'identità

$$Z(\beta) = \prod_k \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^\beta}} \tag{8}$$

   dove il prodotto è su tutti i numeri primi p_k.

   Suggerimento. Si ricordi che per $|x| < 1$, $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$.

4. Mostrare che l'esistenza del punto singolare β_c per $Z(\beta)$ implica l'esistenza di infiniti numeri primi.

3 Classical Field theory (Fluid dynamics)

An incompressible perfect fluid undergoes an irrotational bidimensional flow in a circular cavity of radius R. The fluid gets in and out of the cavity through two holes of negligible diameter, situated at two opposite locations of the bounding circle, at a given speed v_0.

1) Prove that the solution of the problem may be cast in the form of a boundary value problem for the Laplace equation for a scalar field with distributional Neumann boundary conditions on the bounding circle. Find a series of functions which solves the problem. (Hint: develop the Dirac deltas in a Fouries series).

2) Discuss the regularity properties of the solution and determine the velocity field $\mathbf{v}$ at every point of the cavity.

Teoria classica dei campi (Fluidodinamica)

Un fluido perfetto incomprimibile è soggetto ad un moto stazionario irrotazionale bidimensionale attraverso una cavità circolare di raggio R. Il fluido entra ed esce con velocità assegnata v_0 attraverso due fori di diametro trascurabile, posti in posizioni diametralmente opposte lungo la circonferenza di bordo.

1) Dimostrare che la soluzione del problema del moto del fluido può essere ricondotta alla soluzione dell'equazione di Laplace per un campo scalare con condizioni al contorno di Neumann distribuzionali sulla circonferenza di bordo. Trovare una serie di funzioni che soddisfa questo problema al contorno. (Cenno: sviluppare le delta di Dirac in serie di Fourier).

2) Discutere le proprietà di regolarità della soluzione trovata e determinare il vettore velocità $\mathbf{v}$ in ogni punto della cavità.

4 A two–component quantum mechanics problem

Consider the one–dimensional quantum problem with an Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + W^2(x)\right)\mathbf{1} + \frac{\hbar}{2}\frac{dW}{dx}\sigma_3 \ , \tag{9}$$

where

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

are Pauli matrices which satisfy $[\sigma_l, \sigma_m] = 2i\,\epsilon_{lmn}\,\sigma_n$. As usual, $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ with commutation relation $[f(x), p] = i\hbar\frac{df(x)}{dx}$. We assume that $|W(x)| \to \infty$ as $|x| \to \infty$.

1. Prove that the hermitian operators

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left(p\,\sigma_1 + W(x)\,\sigma_2\right) \quad ; \quad Q_2 = \frac{1}{2}\left(p\,\sigma_2 - W(x)\,\sigma_1\right) = -i\sigma_3 Q_1$$

express a symmetry of the system, i.e. they commute with the Hamiltonian

$$[Q_i, H] = 0$$

Hint. It may be useful the following identity for the commutator:

$$[AB, CD] = AC[B, D] + A[B, C]D + C[A, D]B + [A, C]DB$$

2. Prove that the Hamiltonian can be expressed as $H = \frac{1}{2}Q_1^2$ or, equivalently, as $H = \frac{1}{2}Q_2^2$.

3. Show that the eigenvalues E_n of the Hamiltonian (10) satisfy the condition $E_n \geq 0$ and that the exact ground state wave function (with $E = 0$) can be expressed as

$$\psi(x) = \exp\left(\int_0^x dy \frac{W(y)}{\hbar}\sigma_3\right)\psi(0)$$

provided $\psi(x)$ is normalizable. Discuss the conditions that $W(x)$ and $\psi(0)$ have to satisfy in order that this happens.

4. Prove that for $W(x)$ given by $= W(x) = gx^{2n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ the ground state energy E_0 is instead strictly positive and that the symmetry generated by Q_1 and Q_2 is spontaneously broken.

Problema Unidimensionale di Meccanica Quantistica a Due Componenti

Si consideri il problema quantistico unidimensionale con Hamiltoniana data da

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + W^2(x)\right)\mathbf{1} + \frac{\hbar}{2}\frac{dW}{dx}\sigma_{\mathbf{3}} \ , \tag{10}$$

dove

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sono le matrici di Pauli, che soddisfano $[\sigma_l, \sigma_m] = 2i\,\epsilon_{lmn}\,\sigma_n$. Al solito $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ con regola di commutazione $[f(x), p] = i\hbar\dfrac{df(x)}{dx}$. Si assuma che $|W(x)| \to \infty$ per $|x| \to \infty$.

1. Provare che gli operatori hermitiani

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left(p\,\sigma_1 + W(x)\,\sigma_2\right) \quad ; \quad Q_2 = \frac{1}{2}\left(p\,\sigma_2 - W(x)\,\sigma_1\right) = -i\sigma_3 Q_1$$

esprimono una simmetria del sistema, cioè che commutano con l'Hamiltoniana

$$[Q_i, H] = 0$$

Suggerimento. Può essere utile la seguente identità per i commutatori

$$[AB, CD] = AC[B,D] + A[B,C]D + C[A,D]B + [A,C]DB$$

2. Provare che l'Hamiltoniana puo' essere scritta come $H = \frac{1}{2}Q_1^2$ (o, equivalentemente $H = \frac{1}{2}Q_2^2$).

3. Mostrare che gli autovalori E_n dell'Hamiltoniana soddisfano la condizione $E_n \geq 0$ e che la funzione d'onda esatta dello stato fondamentale (con $E = 0$) può essere scritta come

$$\psi(x) = \exp\left(\int_0^x dy \frac{W(y)}{\hbar}\sigma_3\right)\psi(0)$$

purché $\psi(x)$ sia normalizzabile. Discutere le condizioni che $W(x)$ e $\psi(0)$ devono soddisfare affinché questo accada.

4. Provare che per $W(x)$ dato da $= W(x) = gx^{2n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ l'energia dello stato fondamentale E_0 è invece strettamente positiva e che la simmetria generata da Q_1 e Q_2 è rotta spontaneamente.

5 Topology

(1) Prove that every compact subset of a compact Hausdorff space is closed.

(2) Let X and Y be compact Hausforff topological spaces, and $f : X \to Y$ a continuous bijective map. Show that f is a homeomorphism.

(3) Let X and Y be compact Hausdorff spaces and $f : X \to Y$ a map whose graph is closed in $X \times Y$. Show that f is continuous.

(4) Let X be $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ with $m \geq 2$ points removed. Show that for every $n \geq 1$ there exists a connected unramified n-sheeted covering of X.

(5) Construct a double unramified covering $f : X \to Y$, where X is a bidimensional torus with four points removed, and and Y a two-dimensional sphere with four points removed. (Hint to a possible solution: use the Weierstrass or $\mathcal{P}$-function, or use the theory of algebraic curves, or...)

Topologia

(1) Dimostrare che un sottoinsieme compatto di uno spazio compatto di Hausdorff è chiuso.

(2) Siano X e Y spazi topologici compatti di Hausdorff e $f : X \to Y$ una mappa continua e bigettiva. Dimostrare che f è un omeomorfismo.

(3) Siano X e Y spazi topologici compatti di Hausdorff e $f : X \to Y$ una mappa il cui grafico è chiuso in $X \times Y$. Dimostrare che f è continua.

(4) Sia X lo spazio dato da $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ con $m \geq 2$ punti rimossi. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ esiste un ricoprimento connesso di X non ramificato a n fogli.

(5) Costruire un ricoprimento doppio non ramificato $f : X \to Y$, dove X è un toro meno quattro punti, e Y una sfera bidimensionale meno quattro punti. (Cenno ad una possibile soluzione: usare la funzione di Weierstrass o funzione $\mathcal{P}$; oppure usare la teoria delle curve algebriche, o...).