SISSA ISAS
SCUOLA INTERNAZIONALE SUPERIORE DI STUDI AVANZATI - INTERNATIONAL SCHOOL FOR ADVANCED STUDIES
I-34014 Trieste ITALY - Via Beirut 4 - Tel. [+]39-40-37871 - Telex:460269 SISSA I - Fax: [+]39-40-3787528

Settore di Fisica Matematica

Esame di ammissione — Aprile 2002

Il candidato risolva almeno uno dei seguenti esercizi.

1. Geometria proiettiva

Lo spazio proiettivo complesso n-dimensionale viene denotato $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Ricordiamo le seguenti definizioni e notazioni usate in seguito:

i) Sia $f : X \to Y$ un'applicazione olomorfa tra due varietà complesse X e Y. f è un'immersione se è iniettiva e il suo differenziale $T_x(f)$ è iniettivo per ogni $x \in X$.

ii) Una varietà complessa compatta è detta proiettiva se ammette un'immersione in uno spazio proiettivo complesso.

Dimostrare quanto segue:

(1) $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è una varietà complessa compatta.

(2) Mostrare che una quadrica in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Sotto quali condizioni la quadrica è una sottovarietà di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$? (Ricordiamo che una quadrica è per definizione il luogo degli zeri di un polinomio omogeneo di grado 2).

(3) Sia $s : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ l'applicazione data in coordinate omogenee da

$$s((x_0, x_1), (y_0, y_1)) = (x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1).$$

Dimostrare che s è ben definita ed è un'immersione.

(4) Sia $Q = \mathrm{Im}(s)$ l'immagine di s in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Dimostrare che Q è una quadrica liscia di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

(5) Generalizzando il punto (3), dimostrare che il prodotto di due varietà proiettive complesse è una varietà proiettiva complessa.

SISSA ISAS

SCUOLA INTERNAZIONALE SUPERIORE DI STUDI AVANZATI - INTERNATIONAL SCHOOL FOR ADVANCED STUDIES
I-34014 Trieste ITALY - Via Beirut 4 - Tel. [+]39-40-37871 - Telex:460269 SISSA I - Fax: [+]39-40-3787528

Mathematical Physics Sector

Entrance examination — April 2002

The candidate is asked to solve at least one of the folowing exercises.

Projective geometry

The n-dimensional complex projective space will be denoted $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. We recall some definitions and notation used in the following:

i) Let $f : X \to Y$ be a holomorphic map between two complex manifolds X and Y. f is said to be an embedding if it is injective and its differential $T_x(f)$ is injective for every $x \in X$.

ii) A compact complex manifold is said to be projective if it can be embedded into a complex projective space.

Prove the following:

(1) $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ is a compact complex manifold.

(2) Show that a quadric in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ is a compact subset of $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Under what conditions the quadric is a complex submanifold of $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$? (Recall that a quadric is given by the zero set of a homogeneous polynomial of degree 2).

(3) Let $s : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ be the map given in terms of homogeneous coordinates by

$$s((x_0, x_1), (y_0, y_1)) = (x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1).$$

Prove that the map s is well defined and is an embedding.

(4) Let $Q = \mathrm{Im}(s)$ be the image of s in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Show that Q is a nonsingular quadric in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

(5) Generalizing point (3), prove that the product of two projective complex manifolds is a projective complex manifold.

2. Una particella quantistica in un potenziale periodico

Si consideri il moto unidimensionale di una particella quantistica di massa m sulla retta in un potenziale periodico $V(x)$, con $V(x+a) = V(x)$.

(1) Dimostrare che la Hamiltoniana

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

commuta con l'operatore di traslazione $T(a)$ definito da

$$T(a)\psi(x) = \psi(x+a)$$

(2) Dedurre dalla periodicità del potenziale che le autofunzioni limitate della Hamiltoniana possono essere scritte nella forma

$$\psi_k(x) = e^{ikx}u_k(x)$$

dove k è un numero reale e $u_k(x)$ è una funzione con la stessa periodicità di $V(x)$, cioè $u_k(x+a) = u_k(x)$.

(3) Discutere il problema agli autovalori per l'Hamiltoniana e determinare gli intervalli di energie permesse per il potenziale

$$V(x) = \lambda \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x+na)$$

dove $\lambda > 0$ e $\delta(x)$ è la δ di Dirac.

A quantum particle in a periodic potential

Consider the one–dimensional motion of a quantum particle of mass m in a periodic potential field $V(x)$, with $V(x+a) = V(x)$.

(1) Show that the Hamiltonian

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

commutes with the translation operator $T(a)$ defined by

$$T(a)\psi(x) = \psi(x+a)$$

(2) Deduce from the periodicity of the potential that the bounded eigenfunctions of the Hamiltonian can be written in the form

$$\psi_k(x) = e^{ikx}u_k(x)$$

where k is a real number and $u_k(x)$ is a function with the same periodicity of $V(x)$, i.e. $u_k(x+a) = u_k(x)$.

(3) Discuss the eigenvalue problem for the Hamiltonian and determine the allowed range of energies in the potential

$$V(x) = \lambda \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x+na)$$

where $\lambda > 0$ and $\delta(x)$ is the Dirac δ–function.

3. Problemi variazionali in meccanica analitica

(1) Si consideri la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse y la curva $(y, z(y))$, che passa per i punti $A = (0, 1)$ e $B = (1, \cosh(1))$, Trovare l'equazione di una curva per la quale l'area della superficie ottenuta ha un estremale.

(2) Si consideri il principio variazionale di Hamilton della meccanica lagrangiana. Si trovi un integrale primo delle equazioni di Eulero-Lagrange per un sistema autonomo con n gradi di libertà (ovvero caratterizzato dalla Lagrangiana $L = L(q_i, \dot{q}_i), \quad i = 1, \ldots, n;$). Dare il significato di tale integrale per un sistema con lagrangiana

$$L = T(q_i, \dot{q}_i) - V(x) = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j - V(q),$$
$$g_{ij}(q) = g_{ji}(q), \text{with } \det[g_{ij}(q)] \neq 0.$$

Discutere le implicazioni della condizione $\det g_{ij} \neq 0$.

(3) Discutere il problema variazionale per una lagrangiana (generalizzata) con una variabile dipendente $x = x(t)$,

$$L = L(x, \dot{x}, \ddot{x}),$$

con condizione di annullamento al bordo sia per x che per $\dot{x}$, e si deduca la corrispondente equazione di Eulero–Lagrange.

(4) In analogia con il punto (2), si trovi un integrale primo di tale equazione differenziale.

Suggerimento: se si definiscono

$$q_1 = x, \; q_2 = \dot{x}, \; p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}, \; p_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}},$$

e si suppone che le ultime due equazioni possano essere invertite dando

$$\ddot{x} = \ddot{x}(q_1, q_2, p_1, p_2), \qquad \dddot{x} = \dddot{x}(q_1, q_2, p_1, p_2),$$

la equazione di Eulero-Lagrange del punto (3) è equivalente alle equazioni di Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2.$$

con una opportuna Hamiltoniana.

Variational Problems in Analytical Mechanics

(1) Consider the surface obtained by taking a curve $(y, z(y))$ passing through the end points $A = (0, 1)$ and $B = (1, \cosh(1))$, and revolving it around the y–axis. Find the equation of a curve for which the area of this surface has an extremal.

(2) Consider the case of the Hamilton variational principle principle in Lagrangian mechanics.

Find a first integral of the Euler-Lagrange equations, for an autonomous system with n degrees of freedom (with Lagrangian $L = L(q_i, \dot{q}_i), \quad i = 1, \ldots, n$). Explain the meaning of such an integral for a system with Lagrangian

$$L = T(q_i, \dot{q}_i) - V(x) = \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q),$$
$$g_{ij}(q) = g_{ji}(q), \text{with } \det[g_{ij}(q)] \neq 0.$$

Discuss the implication of the condition $\det g_{ij} \neq 0$.

(3) Discuss the variational problem for a generalized Lagrangian with one dependent variable $x = x(t)$,

$$L = L(x, \dot{x}, \ddot{x}),$$

with vanishing boundary conditions both for x and $\dot{x}$ and obtain the corresponding Euler–Lagrange equation.

(4) In analogy with point (4) above, find a first integral of this differential equation.

Hint: If one defines

$$q_1 = x,\ q_2 = \dot{x},\ p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}},\ p_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}},$$

and supposes that the last two equations can be inverted to give

$$\ddot{x} = \ddot{x}(q_1, q_2, p_1, p_2), \qquad \dddot{x} = \dddot{x}(q_1, q_2, p_1, p_2),$$

the Euler-Lagrane equation obtained at point (3) are equivalent to the Hamilton equations

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2.$$

for a suitable Hamiltonian.