Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di Ammissione al Corso di Ph.D. in Geometria

Prova scritta del 2 ottobre 2007

Si richiede al candidato di risolvere compiutamente almeno uno dei seguenti esercizi. Ogni risposta deve essere esaurientemente motivata.

1. a) Si scriva la successione di Mayer-Vietoris per la coomologia di de Rham di una varietà differenziabile, considerando il caso di un ricoprimento costituito da due aperti, e se ne dimostri l'esattezza.

Si calcolino le coomologie di de Rham dei seguenti spazi:

b) un cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ privato di un punto;

c) un toro bidimensionale $S^1 \times S^1$ privato di due punti.

2. a) Si ricordi la nozione di fibrato vettoriale C^∞ su una varietà differenziabile e si dica che cosa è un isomorfismo di fibrati vettoriali.

b) Si faccia l'esempio di due fibrati vettoriali di fibra standard $\mathbb{R}$ sulla circonferenza S^1 che non sono fra loro isomorfi.

Sia M una varietà differenziabile compatta, R l'anello delle funzioni C^∞ su M a valori in $\mathbb{R}$, e E un fibrato vettoriale C^∞ su M di fibra standard $\mathbb{R}^n$. Sia $\Gamma(E)$ lo spazio delle sezioni $M \to E$ di E.

c) Dimostrare che $\Gamma(E)$ è un R-modulo proiettivo finitamente generato.

d) Fornire un esempio in cui $\Gamma(E)$ non è libero su R.

3. a) Si dica quando una varietà algebrica (che potete assumere quasiproiettiva o affine) è normale, e si definisca la normalizzazione. Se ne enuncino le principali proprietà.

b) Si dimostri che una quadrica irriducibile nello spazio proiettivo complesso di dimensione tre è normale.

c) Si calcoli la normalizzazione della curva $y^2 = x^5$ nel piano.

d) Si dia un esempio di normalizzazione che non è biunivoca sui punti.

4. a) Definire le componenti irriducibili di uno spazio topologico, e dimostrare che ogni chiuso di Zariski nel proiettivo ha un numero finito di componenti irriducibili.

b) Si calcolino le componenti irriducibili di $Z(xz, xw, yz, yw)$ nello spazio affine di dimensione 4.

c) Si dia un esempio di chiuso di Zariski proiettivo connesso avente due componenti irriducibili di diversa dimensione.

d) Si dimostri che ogni chiuso di Zariski liscio e connesso nello spazio proiettivo è irriducibile.

5. a) Definire un rivestimento topologico, e un rivestimento normale (o Galois).

b) Dare un esempio di rivestimento non normale.

c) Dimostrare che ogni rivestimento doppio è normale.

d) Sia G un gruppo che agisce su uno spazio topologico X in modo libero e propriamente discontinuo, e H un sottogruppo di X. Sia Y il quoziente di X per l'azione di H, e Z il quoziente per l'azione di G. Dimostrare che le applicazioni naturali $p : X \to Y$, $q : Y \to Z$ e $f := q \circ p$ sono rivestimenti, e che p e f sono normali. Dimostrare che se H è normale in G, allora q è normale. Dare un esempio in cui q non sia normale; dare un esempio in cui q sia normale anche se il gruppo H non è normale in G.

Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Selection for the PhD Course in Geometry

Written test, October 2, 2007

Each applicant must completely solve at least one of the following exercises. Every answer must be sufficiently motivated.

1. a) Write the Mayer–Vietoris sequence for the de Rham cohomology of a differentiable manifold, in the case of a cover consisting of two open subsets, and show its exactness.

Compute the de Rham cohomology groups of the following spaces:

b) a cylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ minus one point;

c) a 2–dimensional torus $S^1 \times S^1$ minus two points.

2. a) Recall the notion of C^∞ vector bundle on a smooth manifold and define what is an isomorphism of vector bundles.

b) Give an example of two nonisomorphic vector bundles on S^1 with fibre $\mathbb{R}$.

Let M be a compact differentiable manifold, R the ring of $\mathbb{R}$–valuedC^∞ functions on M, and E a C^∞ vector bundle on M with standard fiber $\mathbb{R}^n$. Let $\Gamma(E)$ be the space of sections $M \to E$ of E.

c) Prove that $\Gamma(E)$ is a projective, finitely generated R–module.

d) Give an example where $\Gamma(E)$ is not a free R–module.

3. a) Define what it means for an algebraic variety (you may assume it quasiprojective or affine) to be normal. Define the normalization morphism and state its main properties.

b) Prove that an irreducible quadric in three-dimensional projective space is normal.

c) Compute the normalization of the affine plane curve $y^2 = x^5$.

d) Give an example of a normalization morphism which is not bijective on points.

4. a) Define irreducible components of a topological space, and prove that every Zariski closed subset of projective space has a finite number of irreducible components.

b) Find the irreducible components of $Z(xz, xw, yz, yw)$ in 4-dimensional affine space.

c) Give an example of a Zariski closed subset of projective space which is connected and has two components of different dimensions.

d) Prove that every smooth and connected Zariski closed subset of projective space is irreducible.

5. a) Define covering spaces, and normal (or Galois) coverings of topological spaces.

b) Give an example of a non Galois covering.

c) Prove that every double covering is Galois.

d) Let G be a group acting on a topological space X freely and properly discontinuously; let H be a subgroup of X. Let Y be the quotient of X by H, and Z the quotient of X by G.

Prove that the natural maps $p : X \to Y$, $q : Y \to Z$ and $f := q \circ p$ are covering spaces, and that p and f are Galois.

Show that if H is normal in G, then q is Galois. Give an example where q is not Galois; give an example where q is Galois but H is not normal in G.