SISSA – Area Matematica

Esame di ammissione per il corso di Analisi Matematica, Modelli e Applicazioni

10 Settembre 2019

Il candidato risolva CINQUE dei seguenti problemi, e *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Analisi Matematica

1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita dalla seguente legge

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - a_n^2 \\ a_0 = 1/2 \end{cases}$$

   (a) Si provi che $0 < a_{n+1} < a_n$ e $a_n \to 0$.

   (b) Si mostri che $\lim_{n\to\infty} na_n = 1$.

2. Sia $f(t,x)$, con $t,x \in \mathbb{R}$, una funzione regolare a valori reali tali che

$$f(t+1,x) = f(t,x), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) > 0,$$

   per tutti gli $t,x \in \mathbb{R}$. Si dimostri che l'equazione differenziale $\dot{x} = f(t,x)$ ha al piú una soluzione periodica.

3. Per ogni $h \in \mathbb{R}$ si consideri $\tau_h : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ l'operatore di moltiplicazione

$$\tau_h[f](x) = \cos(hx)f(x).$$

   (a) Si mostri che per ogni f in $L^2(\mathbb{R})$

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

   (b) Si provi che

$$\liminf_{h\to 0} \sup_{\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}=1} \|\tau_h f - f\|_{L^2(\mathbb{R})} > 0.$$

   (c) Si mostri che per ogni funzione $\omega : [0,+\infty) \to (0,1]$ tale che $\lim_{t\to 0}\omega(t) = 0$ esiste $f \in L^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\liminf_{h\to 0} \frac{\|\tau_h f - f\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\omega(|h|)} = +\infty.$$

4. Sia $f(x)$, con $x \in \mathbb{R}$, una funzione continua a valori reali tale che $f(f(x)) = x$, per tutti gli $x \in \mathbb{R}$. Si mostri che f ammette un punto fisso: esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = x_0$.

5. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua tale che

$$f(x) = x + o(x),$$

   dove

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{o(x)}{|x|} = 0.$$

   Si dimostrino o si trovino controesempi alle seguente affermazioni.

   (a) Esistono U e V intorni aperti di 0 tali che $f : U \to V$ è iniettiva.

   (b) Esistono U e V intorni aperti di 0 tali che $f : U \to V$ è suriettiva.

6. Siano $A_i \subset [0,1]$, $i = 1, \ldots, n$ insiemi misurabili secondo Lebesgue. Assumendo $\sum_{i=1}^n |A_i| > n-1$, si dimostri che $|\bigcap_{i=1}^n A_i| > 0$.

7. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ due insiemi misurabili secondo Lebesgue aventi entrambi misura di Lebesgue positiva. Si dimostri che $A - B$ contiene un intervallo.
[Suggerimento: Si consideri la convoluzione tra le funzioni caratteristiche di A e B.]

8. Sia $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ la palla di raggio r centrata nell'origine. Si assuma che $u \in C^2(B_3)$ è armonica,
$$\Delta u = 0.$$
   (a) Data $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, si mostri che per tutti gli $x \in B_1$
   $$u(x) \int_{B_1} \varphi(|y|)dy = \int_{|y-x|\leq 1} \varphi(|x-y|)u(y)dy$$
   (b) Si usi il precedente resultato per mostrare che $u \in C^\infty(B_1)$ e che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $C = C(k)$ tale che per tutti gli $x \in B_1$
   $$|\nabla^k u(x)| \leq C \int_{B_2} |u|,$$
   dove $\nabla^k u$ è la collezione di tutte le derivate di ordine $k$di u.

9. Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $u(x,t)$ una soluzione regolare del seguente problema:
$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u^3 = 0, & \text{for } (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ u(x,t) = 0, & \text{for } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases}$$
Si mostri che se $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ per $x \in \Omega$, allora $u \equiv 0$.
[Suggerimento: Si cerchi un'identità per le energie delle soluzioni u.]

10. Sia $K : L^2[-\pi,\pi] \to L^2[-\pi,\pi]$ l'operatore definito come segue
$$(Kf)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |t-s| f(s)\, ds.$$
   (a) Si mostri che K è compatto ed autoaggiunto.
   (b) Si trovino gli autovalori di K.

Analisi Numerica

11. Sia $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, definita come
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$
una matrice simmetrica e definita positiva (SDP).
   (a) Si enunci una definizione di matrice SDP. Si determinino condizioni, se necessarie, su a, b e c in modo tale che A sia SDP.
   (b) Si definisca la fattorizzazione di Cholesky di una matrice SDP. Si derivi analiticamente l'espressione del fattore di Cholesky L della matrice A.

Si consideri ora il seguente algoritmo: data una matrice SDP $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Algoritmo 1 con input B

Sia $B_0 := B$
for $k = 0, 1, 2, \ldots$ **do**
    Si calcoli la fattorizzazione di Cholesky L_k di B_k, cioè che $B_k = L_k L_k^T$.
    Si definisca $B_{k+1} := L_k^T L_k$.

(c) Mostrare che l'Algoritmo 1 è ben definito, cioè che che B_k è SDP per ogni $k \in \mathbb{N}$.

(d) Mostrare che B_k è simile a B, cioè che esiste una matrice invertibile M_k tale che $B_k = M_k^{-1} B M_k$.

(e) Si applichi una singola iterazione dell'Algoritmo 1 alla matrice A definita in precedenza.

12. Sia $a \in \mathbb{R}^+$. Si consideri il seguente metodo iterativo

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{a}{x^{(k)}}\right). \tag{1}$$

(a) Si mostri che, fissato a, esiste $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tale che (1) è il metodo di Newton applicato f, tramite una scrittura esplicita dell'espressione di f.

(b) Si dimostri che (1) è globalmente convergente all'(unica) radice α. Si determini esplicitamente l'espressione di α (in funzione di a).

(c) Si descriva un altro metodo (diverso dal metodo di Newton) per calcolare la radice α di f. Confrontare il metodo con quello in (1) ad esempio in termini di ordine di convergenza.

13. Sia $\Omega = (0, 3)$, $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}$. Si consideri la seguente equazione di diffusione: trovare $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\phi = \phi(x)$ tale che

$$\begin{cases} -(\gamma\phi')' = 0 & \text{in } \Omega, \\ \phi(0) = 10, \\ \gamma(3)\phi'(3) = -2, \end{cases} \tag{2}$$

dove $\phi' = \frac{\partial\phi}{\partial x}$.

(a) Scegliere un metodo di discretizzazione (ad esempio metodo alle Differenze Finite, Elementi Finiti o Volume Finiti). Scrivere tutti i passaggi necessari per ottenere un sistema discreto di equazioni (ed eventuali ulteriori ipotesi necessarie per ottenere tale discretizzazione). Si scriva esplicitamente il sistema di equazioni ottenuto nel caso in cui Ω è partizionato in $n = 3$ intervalli disgiunti.

(b) Descrivere quali metodi si possono utilizzare per risolvere il sistema di equazioni ottenuto dalla discretizzazione in (a), considerando in particolare i casi limite di valori piccoli di n (ad esempio $n = 3$) e valori molto grandi di n (cioè $n \to \infty$).

Si consideri ora il seguente problema di diffusione-trasporto: trovare $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\varphi = \varphi(x)$ tale che

$$\begin{cases} -(\mu\varphi')' + a\varphi' = 0 & \text{in } \Omega, \\ \varphi(0) = 10, \\ \varphi(3) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

con $\mu, a \in \mathbb{R}^+$.

(c) Ripetere il punto (a) per il problema di diffusione-trasporto (3), evidenziando quali siano le più rilevanti differenze rispetto alla risposta ottenuta nel caso del problema di diffusione (2).

(d) Discutere in quali condizioni la soluzione del problema discreto ottenuto in (c) può essere affetta da problemi di stabilità, e si propongano possibili rimedi.

14. Sia $\Omega = (0, L)$, e si consideri il seguente problema di trasporto in Ω: trovare $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u = u(x)$ tale che

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{4}$$

dove $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(u) = au, \tag{5}$$

e $a \in \mathbb{R}$.

(a) Imporre opportune condizioni iniziali e al bordo.

(b) Si partizioni Ω in n intervalli di uguale lunghezza. Si proponga una discretizzazione del problema (basata ad esempio su metodi di Differenze Finite, Elementi Finiti, Galerkin Discontinuo, o Volumi Finiti). Si commenti sulle proprietà dello schema risultante. Riportare tutti i passaggi necessari per ottenere il sistema discreto di equazioni.

(c) Si supponga che sia possibile scrivere il sistema discreto nella seguente forma matriciale: $M\frac{d}{dt}\mathbf{u} = K\mathbf{u}$, dove M e K sono due matrici opportune (che non è necessario derivare da (b)) e $\mathbf{u}$ il vettore delle incognite. Effettuare una discretizzazione temporale utilizzando il metodo di Eulero esplicito.

(d) Si descrivano le proprietà di stabilità del metodo di Eulero esplicito method per un generico sistema di equazioni differenziale ordinarie.

15. Si consideri il problema di Stokes stazionario: dato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, trovare $(\mathbf{u}, p)$, $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{in}} & \text{su } \Gamma_{\text{in}}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_{\text{wall}}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{out}} & \text{su } \Gamma_{\text{out}}, \end{cases} \tag{6}$$

dove Γ_{in}, Γ_{wall} e Γ_{out} formano una partizione di $\partial\Omega$.

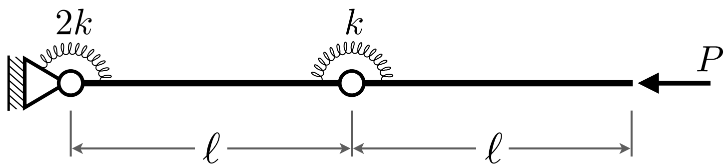
(a) Si scriva la formulazione debole del problema (6), specificando gli spazi funzionali sia per le incognite velocità e pressione, sia per le funzioni test. Si studi l'esistenza e l'unicità della soluzione, introducendo ipotesi opportune.

(b) Siano $\mathbf{u}_{\text{in}} : \Gamma_{\text{in}} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u}_{\text{out}} : \Gamma_{\text{out}} \to \mathbb{R}^2$ dati al bordo assegnati. Denotando con $\mathbf{n}$ il versore normale esterno a $\partial\Omega$, si dimostri che $\int_{\Gamma_{\text{in}}} \mathbf{u}_{\text{in}}\cdot\mathbf{n} = -\int_{\Gamma_{\text{out}}} \mathbf{u}_{\text{out}}\cdot\mathbf{n}$ è una condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione debole. Si riporti una interpretazione fisica di tale condizione.

(c) Si introduca uno schema di discretizzazione basato sul metodo agli elementi finiti, indicando le ipotesi effettuate.

Meccanica dei Continui

16. Si determini il carico critico P_c del sistema elastico discreto mostrato in figura. Si osservi che le due molle torsionali hanno rigidezze diverse, $2k$ e k.

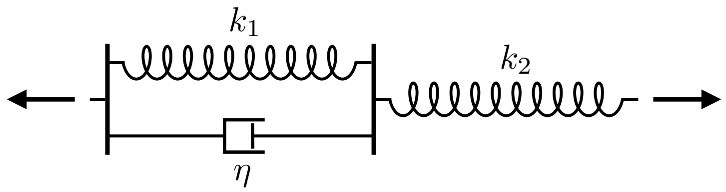


17. Si consideri la deformazione omogenea $\mathbf{y} : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ tale che (in componenti cartesiane)

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \gamma\, x_2\,, \\ y_2 &= \beta\, x_2\,, \\ y_3 &= x_3\,, \end{aligned}$$

dove γ e β sono scalari positivi mentre x_i, $i = \{1, 2, 3\}$, rappresentano le coordinate di un punto materiale $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$. Si determinino gli stretch principali.

18. Si determini la risposta costitutiva (relazione tra forza applicata, allungamento e loro derivate temporali) del modello reologico monodimensionale mostrato in figura. Si noti che il sistema comprende due molle elastiche lineari ed uno smorzatore viscoso lineare.



19. Un corpo cilindrico di altezza h e basi circolari di raggio r è in equilibrio sotto l'azione di trazioni uniformi $\pm\sigma\boldsymbol{e}_z$ applicate alle sue estremità ($\boldsymbol{e}_z$ denota l'asse del corpo cilindrico) e vincolato sulla superficie laterale così che gli spostamenti radiali siano impediti. Si determinino l'allungamento del cilindro ed il modulo delle forze di contatto laterali utilizzando la teoria dell'elasticità lineare nell'ipotesi di risposta costitutiva isotropa.

20. Sia $\mathbf{y}:\mathcal{B}\times\mathbb{R}\to\mathcal{E}$ un moto piano rappresentato in componenti cartesiane da

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1 \exp(t)\,,\\
y_2 &= x_2 + t\,,\\
y_3 &= x_3\,,
\end{aligned}
$$

dove x_i, $i=\{1,2,3\}$, sono le coordinate di un punto materiale $\mathbf{x}\in\mathcal{B}$ e $t\geq 0$ rappresenta il tempo. Si calcoli la descrizione spaziale del campo di velocità e si determinino le linee di corrente.