SISSA – Area Matematica

Esame di ammissione per il corso di Analisi Matematica, Modelli e Applicazioni

2 settembre 2013

Il candidato risolva CINQUE dei seguenti problemi, e *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Equazioni differenziali e teoria della misura

1. Trovare una soluzione u del problema

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x), & t \in \mathbb{R},\ x \in [0,\pi], \\ u(0,x) = 0, & x \in [0,\pi], \\ u_t(0,x) = \sin(x), & x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Sia $-\pi/2 < \lambda < \pi/2$. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \cos(y(x)), & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = \lambda. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che c'è una ed una sola soluzione y definita su $\mathbb{R}$.

(b) Dimostrare che
$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

(c) Dimostrare che esiste un unico $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $y(x_0) = 0$.

(d) Dimostrare che $y(x_0 - x) = -y(x_0 + x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. Sia A un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}$. Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ e per ogni $y \in \mathbb{R}$ sia

$$T(f,y) := \int_A f(x-y)\,dx.$$

(a) Dimostrare che per ogni $y \in \mathbb{R}$ la funzione $f \mapsto T(f,y)$ è continua su $L^1(\mathbb{R})$.

(b) Dimostrare che per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ la funzione $y \mapsto T(f,y)$ è continua su $\mathbb{R}$.

4. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio con misura. Siano u_n, f_n, v_n, u, f, v funzioni reali misurabili su X, con $u_n \to u$, $f_n \to f$ e $v_n \to v$ q.o. in X. Supponiamo che per ogni n si abbia $u_n \le f_n \le v_n$ q.o. su X, che u_n, u, v_n, v siano in $L^1(\mu)$ e che inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \int_X u_n d\mu = \int_X u d\mu \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X v_n d\mu = \int_X v d\mu.$$

(a) Dimostrare che allora anche $f_n, f \in L^1(\mu)$, e che si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

(b) Dedurre da (a) che se $f_n, f \in L^1(\mu)$, $f_n \to f$ q.o. in X e $\|f_n\|_{L^1} \to \|f\|_{L^1}$, allora si ha anche

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Analisi di base e analisi funzionale

5. Diciamo che una successione x_n, $n = 1, 2, \dots$, converge ad a secondo Cesaro, e scriviamo $x_n \xrightarrow{c} a$, se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = a.$$

Una funzione f è continua secondo Cesaro in a se $x_n \xrightarrow{c} a$ implica $f(x_n) \xrightarrow{c} f(a)$. Dimostrare che se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua secondo Cesaro in 0 ed $f(0) = 0$, allora f è lineare.
(Suggerimento: ogni successione del tipo $x, y, z, x, y, z, \dots$ converge secondo Cesaro)

6. Dimostrare che per ogni intero non negativo n si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right] = n\,,$$

dove $[x]$ indica la parte intera di x.
(Suggerimento: usare la rappresentazione di n in base 2)

7. Sia $T\colon C([0,1]) \to C([0,1])$ l'operatore lineare definito da $T(f) := y$, dove y è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + f(x), & x \in [0,1], \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che T è compatto.

(b) Dimostrare che T non ha autovalori.

8. Si consideri l'operatore $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ definito da

$$(Tf)(t) := \int_0^1 \kappa(t,s) f(s) ds,$$

dove $\kappa : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ soddisfa le seguenti proprietà:

- per ogni $t \in [0,1]$, la funzione $\kappa_t(s) := \kappa(t,s)$ è integrabile in s:

$$\int_0^1 \big|\kappa_t(s)\big| ds < \infty,$$

- la funzione $[0,1] \ni t \mapsto \kappa_t \in L^1([0,1])$ è continua.

Mostrare che T è compatto.

9. Si consideri il sottospazio M di

$$\ell^\infty = \Big\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \|x\|_{\ell^\infty} = \sup_n |x(n)| < \infty \Big\}$$

definito da

$$M = \Big\{ x \in \ell^\infty : x(n) \neq 0 \text{ solo per un numero finito di } n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

(a) Si studi se M è chiuso e in caso negativo si esibisca la chiusura $\bar{M}$.

(b) Si mostri che non esiste alcun funzionale $f \in (\ell^\infty)^*$ tale che

$$\mathrm{Kernel}\, f = \bar{M}.$$

(c) Dimostrare che

$$K := \bar{M} \cap \big\{ \|x\|_{\ell^\infty} \leq 1 \big\}$$

non ha punti estremali.

10. Sia $J \subset [0,1]$ chiuso e si consideri un sottospazio chiuso E di $C([0,1])$. Si assuma che per ogni $g \in C(J)$ esista $f \in E$ tale che

$$f(t) = g(t) \text{ per ogni } t \in J.$$

Si mostri che esiste una costante c indipendente da g tale che valga la seguente affermazione:

per ogni $g \in C(J)$ esiste $f \in E$ tale che $f(t) = g(t)$ e $\|f\|_{C([0,1])} \leq c \|g\|_{C(J)}$.

Analisi Numerica

11. Sia $V = H_0^1(0,1)$ e siano $a : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare e $F : V \to \mathbb{R}$ la forma lineare, definite rispettivamente come segue:

$$a(u,v) := \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, u'(x)\, v'(x)\, dx, \qquad F(v) := \int_0^1 \left(-e^x - \frac{1}{(1+x)^2} \right) v(x)\, dx.$$

Sia inoltre u la soluzione del seguente problema in forma debole:

$$\text{trovare } \; u \in V \; \text{ tale che } \quad a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V.$$

Si consideri l'approssimazione di Galerkin a elementi finiti:

$$\text{trovare } \; u_h \in V_h \; \text{ tale che } \quad a(u_h, v_h) = F(v_h), \qquad \forall v_h \in V_h,$$

dove V_h è un sottospazio di V di dimensione finita, dipendente da un parametro reale positivo h. Fornire una stima a priori dell'errore $\|u - u_h\|_V$, assumendo che per lo spazio V_h valga le seguente proprietà di approssimazione

$$\inf_{w_h \in V_h} \|v - w_h\|_V \leq Ch|v|_{H^1(0,1)}, \quad \forall v \in V,$$

con una costante C indipendente da h e v.

12. Si consideri il seguente problema al contorno:

$$\begin{aligned}
&-(\mu u')' + \beta u' + \gamma u = f \quad \text{in } \Omega = (a,b)\\
&u(a) = 0\\
&u'(b) = g_b
\end{aligned}$$

e si assuma che $g_b \in \mathbb{R}$, $\mu, \beta, \beta', \gamma \in C^0([a,b])$, e $f \in L^2(a,b)$.

(a) Scrivere il problema in forma debole, esplicitando la definizione dello spazio V, della forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$ e della forma lineare $F(\cdot)$.

(b) Dare delle condizioni perché la forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$ sia coercitiva.

13. Siano $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica e definita positiva e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ un vettore.

1. Si definisca il *metodo del gradiente* (chiamato anche metodo di Richardson stazionario) per la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, spiegando il significato del nome e motivando la scelta delle direzioni di discesa.

2. Mostrare che il parametro di accelerazione α_k è dato dalla soluzione del seguente problema di minimizzazione:
$$\Phi(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \Phi(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{r}^{(k)}),$$
dove $\mathbf{r}^{(k)}$ è il residuo al passo k e $\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x}$ è il cosiddetto funzionale energia associato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

14. Sia $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matrice i cui elementi sono dati da $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = \gamma$, $a_{21} = 0$, e si indichi con
$$K_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$$
il numero di condizionamento (in norma p) di A. Si ricorda che la norma p per una matrice A è data da
$$\|A\|_p := \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p \,, \qquad \text{dove} \qquad \begin{cases} \|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p}, & \text{se } 1 \le p < \infty, \\ \max\{|x_1|, |x_2|\}, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$
Verificare che, per ogni $\gamma \ge 0$,
$$K_\infty(A) = K_1(A) = (1+\gamma)^2.$$
Sia $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ e sia $\mathbf{x}$ la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dimostrare che
$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \le (1+\gamma)^2 \frac{\|\delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}.$$
dove $(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$ è la soluzione del sistema perturbato $A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$, essendo $\delta\mathbf{b}$ una perturbazione del vettore $\mathbf{b}$.

15. Sia g una funzione continua definita sull'intervallo $[-1, 1]$. Si prendano tre punti di interpolazione $t_0 = -1$, $t_1 = \alpha$ e $t_2 = 1$, dove α è un numero reale tale che $|\alpha| < 1$. Per approssimare l'integrale $\int_{-1}^{1} g(t)dt$ si consideri la formula di quadratura seguente:
$$I_2(g) = \sum_{j=0}^{2} \omega_j g(t_j) = \omega_0 g(-1) + \omega_1 g(\alpha) + \omega_2 g(1).$$

1. Trovare i pesi $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ in funzione di α tali che tale formula sia esatta di grado 2.
2. Trovare inoltre α tale che $I_2(p) = \int_{-1}^{1} p(t)dt$ per tutti i polinomi di grado 3.