Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di ammissione per il corso di Analisi Matematica, Modelli e Applicazioni

Prova scritta, 11 settembre 2014

Il candidato risolva CINQUE dei seguenti problemi, e indichi chiaramente sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non piú di cinque).

Es. 1. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura.

(a) Siano $1 \leq p, q \leq \infty$. Sia f_n una successione in $L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ che converge ad f in $L^p(\mu)$ (in norma $\|\cdot\|_p$) e ad $g \in L^q(\mu)$ (in norma $\|\cdot\|_q$). Ne segue che $f = g$ quasi-ovunque?

(b) Assumendo che $L^q(\mu)$ è contenuto in $L^p(\mu)$ (con $1 \leq p, q \leq \infty$), dimostrare che la inclusione di $L^q(\mu)$ in $L^p(\mu)$ è continua.

(c) Sia $\mathcal{F}(\mu) := \{E \in \mathcal{M} : \mu(E) < \infty\}$. Dimostrare che i seguenti fatti sono equivalenti:

i) Esistono $p, q \in \mathbb{R}$ tali che $1 \leq p < q < \infty$ ed $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

ii) $\sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{F}(\mu)\} < \infty$

(*Suggerimento*: stimare il sup con la norma operatoriale della inclusione ...).

iii) Esiste $A \in \mathcal{F}(\mu)$ tale che $\mu(A) \geq \mu(E)$, per ogni $E \in \mathcal{F}(\mu)$.

iv) Per ogni $p, q \in \mathbb{R}$ con $0 < p < q < \infty$ si ha $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

Es. 2. Siano X, Y spazi normati e Y sia completo. Denotiamo con $L(X, Y)$ lo spazio degli operatori lineari limitati da X in Y munito della usuale norma operatoriale. Sia T_n una successione in $L(X, Y)$ tale che $\sup\{\|T_n\|_{L(X,Y)} : n \in \mathbb{N}\} = L < \infty$. Provare che

(a) $V = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} T_n x \quad \text{exists in } Y\}$ è un sottospazio lineare chiuso di X e che la formula $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ $(x \in V)$ definisce un operatore lineare limitato $T : V \to Y$.

(b) Dedurre dal punto precedente il lemma di Riemann–Lebesgue: se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile, limitata, e periodica di periodo $\tau > 0$, allora

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(\lambda x)\, dx = \mu \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \qquad \mu = \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx.$$

Es. 3. Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che f è convessa se e solo se

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

per ogni $a,\, b \in \mathbb{R}$ con $0 \leq a < b \leq 1$.
Suggerimento: Osservare che per una funzione affine g si ha $g(\frac{a+b}{2}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$.

Es. 4 . Sia $K := \{f \in L^2(0,1) := L^2((0,1),\mathbb{R}) : f \geq 0 \text{ q.o. in } (0,1)\}$.

(a) Dimostrare che K è convesso e chiuso in $L^2(0,1)$.

(b) Per ogni $g \in L^2(0,1)$ trovare un'espressione esplicita per la proiezione $P_K(g)$, definita come l'unico elemento di K tale che $\|g - P_K(g)\|_{L^2(0,1)} \leq \|g - f\|_{L^2(0,1)}$ per ogni $f \in K$.

Es. 5. Sia (f_n) una successione in $L^2(0,1)$ e sia $f \in L^2(0,1)$. Supponiamo che

(a) $f_n \to f$ fortemente in $L^1(0,1)$,

(b) $f_n \rightharpoonup f$ debolmente in $L^2(0,1)$.

Dimostrare che $f_n \to f$ fortemente in $L^p(0,1)$ per ogni $p \in (1,2)$. Dare un esempio di (f_n) ed f che soddisfano (a) e (b) e tali che (f_n) non converga ad f fortemente in $L^2(0,1)$.

Es. 6. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2+y^2) - x - y \\ \dot{y} = y(y^2+x^2) + x - y \end{cases}$$

e, per ogni $P \in \mathbb{R}^2$, la sua soluzione $u(t,P) := (x(t,P), y(t,P))$ con dato iniziale $u(0,P) = P$. Discutere l'intervallo massimale (T_P^-, T_P^+) di esistenza della soluzione $u(t,P)$ al variare di P e si disegni il grafico qualitativo della soluzione.

Es. 7. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica, ossia $u(x+2\pi) = u(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, di classe C^2. Denotiamo con u_x ed u_{xx} rispettivamente le derivate prime e seconde di u. Provare che

(a) $\int_0^{2\pi} u_x^4\,dx \leq 9\|u\|_{L^\infty}^2 \int_0^{2\pi} u_{xx}^2\,dx$,

(b) La stessa disuguaglianza vale per ogni funzione 2π-periodica u nello spazio di Sobolev H^2.

Suggerimento: $u_x^4 = (u_x^3 u)_x - 3u_{xx}u_x^2 u$.

Es. 8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che

$$f(x+y) = f(x)f(y)\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad f(0) = 1\,.$$

Provare che

(a) $f(x) = e^{ax}$ dove $a := f'(0)$,

(b) lo stesso risultato vale per una funzione f solo continua.

Es. 9. Sia $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile. Si definisca per ricorrenza la successione $f_{n+1}(x) = \int\limits_0^x f_n(t)\,dt$, $n = 1, 2, \ldots$. Provare che la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ è convergente e trovare una espressione chiusa della sua somma.

Es. 10. Sia f una funzione olomorfa, non costante, definita in un intorno del disco unitario. Sia z_0 un punto nel cerchio unitario tale che $f(z_0) = \max\limits_{|z|=1} |f(z)|$. Provare che $\frac{df}{dz}(z_0) \neq 0$.

Es. 11. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e si supponga di volerlo risolvere con il metodo di Richardson stazionario con precondizionatore diagonale.

(a) Si verifichi che $P^{-1}A$ simmetrica e definita positiva, e si calcoli il parametro di accelerazione ottimale α_{opt}.

(b) Si calcoli esplicitamente il fattore di riduzione dell'errore C nella stima:

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|_A \leq C \|\mathbf{e}_k\|_A$$

con $\mathbf{e}_k = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k$.

(c) Si dimostri la stima d'errore:

$$\|\mathbf{e}_k\|_A \leq \frac{C^k}{1-C} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_A.$$

(d) Scegliendo come vettore iniziale $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T$, si fornisca una stima del numero di iterazioni necessarie per ottenere un errore in norma $\|\cdot\|_A < 10^{-9}$.

Es. 12. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Si localizzi lo spettro $\sigma(A)$ della matrice A mediante i teoremi di Gershgorin. Si verifichi poi la previsione mediante il calcolo esplicito degli autovalori.

(c) Si definisca il numero di condizionamento di una matrice, e se ne specifichino le proprietà nel caso in cui la matrice sia simmetrica.

Es. 13. Si consideri l'equazione $x = \sqrt{a}$, $a > 0$.

(a) Si scriva il metodo di Newton per approssimare la radice $x = \sqrt{a}$.

(*Suggerimento:* si applichi il metodo di Newton ad una opportuna equazione $f(x, a) = 0$).

(b) Valutare l'intervallo di convergenza del metodo trovato al punto precedente.

(c) Si discuta l'ordine di convergenza del metodo.

Es. 14. Si consideri il problema parabolico: trovare $u : [0, 1] \times [0, 1) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{su } [0,1] \times [0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{per } t \in [0,1) \\ u(x,0) = u_0 & \text{per } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Si scriva la forma debole del problema (1), specificando gli spazi funzionali per l'incognita e la funzione test.

(b) Si dimostri la buona posizione del problema, e si fornisca una stima a priori per la soluzione.

(c) Si scriva la semidiscretizzazione in spazio con un metodo di Galerkin-Elementi Finiti.

(d) Si scriva la forma algebrica della discretizzazione in tempo con il θ-metodo, quindi si riassumano brevemente le proprietà del metodo nei tre casi $\theta = 0, 1/2, 1$.

Es. 15 Si consideri il problema di diffusione-trasporto: trovare $u : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{cases} -(\mu u')' + bu' = 0 & \text{per } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Supponendo $\mu, b \in L^2(0, 1)$, scrivere la formulazione debole del problema (2), specificando gli spazi funzionali per l'incognita e la funzione test.

(b) Supponendo che μ/b sia molto piccolo, illustrare un possibile metodo di stabilizzazione fortemente consistente, esplicitando le parti simmetrica e antisimmetrica dell'operatore differenziale associato al problema.