Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di ammissione per il corso di Analisi Matematica, Modelli e Applicazioni

Prova scritta, 10 Settembre 2015

Il candidato risolva CINQUE dei seguenti problemi, e indichi chiaramente sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Es. 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.

(a) Dimostrare che esistono i limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Dimostrare che se entrambi i limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ sono finiti allora la funzione f è costante.

Es. 2. Si consideri una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non identicamente nulla della forma

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i e^{xb_i},$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Si dimostri che f ha al più $n-1$ zeri.
(suggerimento: procedere per induzione)

Es. 3. Siano $p \in (1, \infty)$ e $f_n, f_\infty \in L^p(0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Dimostrare che (f_n) converge debolmente a f_∞ in $L^p(0, 1)$ se e solo se $\sup_n \|f_n\|_{L^p} < \infty$ e per ogni $x \in (0, 1)$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x f_\infty(y)\,\mathrm{d}y.$$

(b) L'equivalenza sopra rimane vera se la condizione $\sup_n \|f_n\|_{L^p} < \infty$ viene rimossa?

Es. 4. Siano $p_1, p_2, q_1, q_2 \in (1, \infty)$ tali che $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$ per $i = 1, 2$. Si definiscano gli spazi $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ come segue:

$$E := L^{p_1}(\mathbb{R}) \cap L^{p_2}(\mathbb{R}), \qquad \|f\|_E := \max\left\{\|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R})}, \|f\|_{L^{p_2}(\mathbb{R})}\right\}$$

e

$$F := \left\{g_1 + g_2 \ : \ g_1 \in L^{q_1}(\mathbb{R}),\ g_2 \in L^{q_2}(\mathbb{R})\right\}, \qquad \|g\|_F := \inf\left\{\|g_1\|_{L^{q_1}(\mathbb{R})} + \|g_2\|_{L^{q_2}(\mathbb{R})}\right\},$$

dove l'inf è considerato tra tutte le coppie g_1, g_2 con $g_1 \in L^{q_1}(\mathbb{R})$, $g_2 \in L^{q_2}(\mathbb{R})$ tali che $g = g_1 + g_2$.

(a) Dimostrare che $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ sono spazi di Banach

(b) Sia $L_1 : F \to \mathbb{R}$ lineare e continuo. Dimostrare che esiste una unica $f \in E$ tale che $L_1(g) = \int_{\mathbb{R}} fg \, \mathrm{d}\mathcal{L}$ per ogni $g \in F$, dove $\mathcal{L}$ è la misura di Lebesgue, e che la norma operatoriale di L_1 è uguale a $\|f\|_E$.

(c) Sia $L_2 : E \to \mathbb{R}$ lineare e continuo. Dimostrare che esiste una unica $g \in F$ tale che $L_2(f) = \int_{\mathbb{R}} fg \, \mathrm{d}\mathcal{L}$ per ogni $f \in E$ e che la norma operatoriale di L_2 è uguale a $\|g\|_F$.

Es. 5. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e siano $F_n, F_\infty : X \to X$ contrazioni con la stessa costante $\alpha \in (0, 1)$, ovvero tali che

$$d\big(F_i(x), F_i(y)\big) \le \alpha \, d(x, y), \qquad \forall x, y \in X, \; i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Si supponga che $F_n \to F_\infty$ puntualmente, e siano $x_n, x_\infty \in X$ tali che $x_n = F_n(x_n)$ e $x_\infty = F_\infty(x_\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $x_n \to x_\infty$.

Es. 6. Sia $f : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} f'(t) = f(t)^2 + t, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Si dimostri che $\alpha < 3$.

Es. 7. Sia $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $U(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 + a x_1 x_2$ con $a \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -\nabla U(x)$$

con $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^2$ sono periodiche?

Es. 8. Sia B uno spazio di Banach e sia $\gamma : [0, 1] \to B$ una curva continua rispetto alla topologia debole di B.

(a) Supponendo che B sia separabile, dire se γ è Boreliana, intendendo B munito dei Boreliani generati dalla topologia forte.

(b) La risposta alla domanda sopra cambia se si rimuove l'ipotesi che B sia separabile?

Es. 9. Sia $a : [0,1] \to [1,2]$ una funzione Boreliana e per ogni $f \in L^2(0,1)$ si consideri il funzionale $E_f : L^2(0,1) \to [0,+\infty]$ definito come

$$E_f(g) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \Big(a|g'(x)|^2 + |f(x) - g(x)|^2\Big)\,\mathrm{d}x, & \text{se } g \in W^{1,2}(0,1), \\ +\infty, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Dimostrare che per ogni $f \in L^2(0,1)$ esiste un unico minimo $T(f) \in L^2(0,1)$ del funzionale E_f.

(b) Dimostrare che $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ è un operatore lineare e continuo.

(c) Dimostrare che $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ è un operatore compatto.

Es. 10. Per $f, g \in C([0,1])$ si definisca

$$d(f,g) := \int_0^1 \min\{1, |f(x) - g(x)|\}\,\mathrm{d}x$$

(a) Dimostrare che d è una distanza su $C([0,1])$.

(b) Sia $L : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ un operatore lineare, continuo rispetto alla topologia indotta da d. Dimostrare che $L = 0$.

Es. 11. Si consideri il problema di Cauchy

$$y' = f(t,y), \quad y(0) = y_0,$$

e il seguente metodo di Runge-Kutta esplicito a due stadi per la sua approssimazione:

$$y_{n+1} = y_n + h[\alpha_1 f(t_n, y_n) + \alpha_2 f(t_n + \theta h, y_n + \beta h f(t_n, y_n))],$$

con α_1, α_2, θ e β coefficienti reali dati.
Ricordiamo che si dice che la quantità $\bar{\lambda} = h\lambda$ appartiene alla regione di assoluta stabilità se la soluzione approssimata $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ottenuta applicando lo schema numerico alla soluzione dell'equazione differenziale modello $y' = \lambda y$ è limitata.

(a) Sia $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ (Metodo di Eulero Esplicito). Determinare la regione di assoluta stabilità per $\bar{\lambda}$ reali, e indicare l'ordine dell'errore di troncamento locale del metodo;

(b) trovare le relazioni tra i coefficienti α_1, α_2, θ e β che garantiscano che lo schema di approssimazione sia del secondo ordine;

(c) determinare la regione di assoluta stabilità per $\bar{\lambda}$ reali nel caso generale.

Es. 12. Sia Π_k l'insieme dei polinomi di grado pari o minore a k. Dato $q \in \Pi_{n+1}$ tale che

$$\int_a^b p(x)q(x)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ per ogni } p \in \Pi_n,$$

(a) Mostrare che le radici di q sono tutte semplici e appartengono all'intervallo aperto (a, b);

(b) Sia $a = -1, b = 1$. Costruire $p_i \in \Pi_i$, $i = 0, 1, 2$, tale che $p_i(1) = 1$ e $\int_{-1}^1 p_i(x)p_j(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad i \neq j$;

(c) Trovare il polinomio di secondo grado $q_2(x)$ tale che $\int_{-1}^1 |x^3 - q_2(x)|^2\,\mathrm{d}x$ sia minimo.

Es. 13. Si consideri il sistema lineare algebrico $Au = f$ su uno spazio vettoriale V di dimensione finita, dove A è un operatore simmetrico definito positivo rispetto al prodotto interno $(\cdot\,,\,\cdot)$. Una versione del metodo del gradiente coniugato può essere scritta come segue:

Dato u_0, sia $r_0 = f - Au_0$, $p_0 = r_0$.
Per $k = 1, 2, \ldots$
$\alpha_k = (r_{k-1}, r_{k-1})/(Ap_{k-1}, p_{k-1})$,
$u_k = u_{k-1} + \alpha_k p_{k-1}$,
$r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_{k-1}$,
$\beta_k = (r_k, r_k)/(r_{k-1}, r_{k-1})$,
$p_k = r_k + \beta_k p_{k-1}$.

Per questo metodo è nota la stima di convergenza

$$\|u - u_k\|_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa(A)} - 1}{\sqrt{\kappa(A)} + 1}\right)^k \|u - u_0\|_A$$

dove $\|v\|_A^2 := (Av, v)$, e il numero di condizionamento $\kappa(A)$ è definito come $\kappa(A) := \lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$ con $\lambda_{\max}(A)$ e $\lambda_{\min}(A)$ il massimo e minimo autovalore di A rispettivamente.
Sia $B : V \to V$ un altro operatore simmetrico definito positivo rispetto al prodotto interno $(\cdot\,,\,\cdot)$.

(a) dimostrare che BA è simmetrico definito positivo rispetto al nuovo prodotto interno $(u, v)_{B^{-1}} := (B^{-1}u, v)$, $u, v \in V$.

Un metodo del gradiente coniugato precondizionato può essere ottenuto applicando il metodo del gradiente coniugato al sistema precondizionato $BAu = Bf$ rispetto al nuovo prodotto interno. Usando l'algoritmo precedentemente introdotto per il metodo del gradiente coniugato e la sua stima di convergenza,

(b) derivare l'algoritmo corrispondente per il metodo del gradiente coniugato precondizionato. L'algoritmo non dovrebbe richiedere alcuna valutazione di B^{-1};

(c) derivare la corrispondente stima di convergenza in termini del numero di condizionamento di BA.

Es. 14. Si consideri il problema: trovare $\alpha \in I = [0, 2]$ tale che

$$\alpha = 2 - \mathrm{e}^{-\alpha}. \tag{1}$$

(a) Si determini se il metodo di bisezione è applicabile per risolvere il problema (1). In caso positivo, si stimi il numero di iterazioni necessarie per approssimare α con una tolleranza inferiore a 10^{-3}.

(b) Si scriva uno schema di punto fisso per risolvere il problema (1), e ne si discutano le proprietà di convergenza globale e locale.

(c) Si provi la seguente stima a priori per l'errore:

$$|x_k - \alpha| \leq C^k |x_0 - \alpha|.$$

(d) Si supponga di voler adottare un criterio d'arresto del tipo:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon.$$

Si mostri come tale criterio implichi la seguente stima d'errore:

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{1 - C}.$$

Es. 15. Si consideri il problema di Stokes stazionario: trovare $(\mathbf{u}, p)$ tali che

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{su } \mathit{\Gamma}_D \equiv \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Si scriva la formulazione debole del problema (2), specificando gli spazi funzionali per le incognite e le funzioni test.

(b) Si discutano eventuali condizioni necessarie di compatibilità (relative al dato $\mathbf{g}$ con gli opportuni spazi funzionali) per garantire la buona posizione del problema in forma variazionale.

(c) Si trovi una soluzione di tipo Poiseuille per velocità e pressione in un dominio $\Omega = (x, y), x = [0, L], y = [0, 1]$ introducendo come condizione al bordo $\mathbf{g} = (y(y - 1), 0)$.

Es. 16. Il tensore degli sforzi di Cauchy è uno dei costrutti fondamentali della meccanica classica dei mezzi continui. Sotto opportune ipotesi, è un tensore simmetrico.

(a) Si discuta il significato fisico di questa proprietà di simmetria.

(b) Si fornisca un esempio concreto di un sistema fisico nel quale questa proprietà è verificata, e di uno in cui essa non è verificata.

(c) Si discutano le ipotesi che garantiscono la simmetria del tensore di Cauchy e si fornisca una dimostrazione di questa proprietà di simmetria.