Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Admission Exam for the Phd Course in Mathematical Analysis, Modelling and Applications

Written Exam, 11 September 2014

The candidate should solve FIVE among the following exercises and should clearly mark on the first page of the solutions which exercises have been solved and have to be corrected (no more than FIVE exercises, please).

Es. 1. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura.

(a) Siano $1 \leq p, q \leq \infty$. Sia f_n una successione in $L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ che converge ad f in $L^p(\mu)$ (in norma $\|\cdot\|_p$) e ad $g \in L^q(\mu)$ (in norma $\|\cdot\|_q$). Ne segue che $f = g$ quasi-ovunque?

(b) Assumendo che $L^q(\mu)$ è contenuto in $L^p(\mu)$ (con $1 \leq p, q \leq \infty$), dimostrare che la inclusione di $L^q(\mu)$ in $L^p(\mu)$ è continua.

(c) Sia $\mathcal{F}(\mu) := \{E \in \mathcal{M} : \mu(E) < \infty\}$. Dimostrare che i seguenti fatti sono equivalenti:

i) Esistono $p, q \in \mathbb{R}$ tali che $1 \leq p < q < \infty$ ed $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

ii) $\sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{F}(\mu)\} < \infty$

(*Suggerimento*: stimare il sup con la norma operatoriale della inclusione ...).

iii) Esiste $A \in \mathcal{F}(\mu)$ tale che $\mu(A) \geq \mu(E)$, per ogni $E \in \mathcal{F}(\mu)$.

iv) Per ogni $p, q \in \mathbb{R}$ con $0 < p < q < \infty$ si ha $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

Es. 2. Siano X, Y spazi normati e Y sia completo. Denotiamo con $L(X, Y)$ lo spazio degli operatori lineari limitati da X in Y munito della usuale norma operatoriale. Sia T_n una successione in $L(X, Y)$ tale che $\sup\{\|T_n\|_{L(X,Y)} : n \in \mathbb{N}\} = L < \infty$. Provare che

(a) $V = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} T_n x \ \text{ exists in } Y\}$ è un sottospazio lineare chiuso di X e che la formula $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ $(x \in V)$ definisce un operatore lineare limitato $T : V \to Y$.

(b) Dedurre dal punto precedente il lemma di Riemann–Lebesgue: se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile, limitata, e periodica di periodo $\tau > 0$, allora

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(\lambda x)\, dx = \mu \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \qquad \mu = \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx.$$

Es. 3. Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che f è convessa se e solo se

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

per ogni a, $b \in \mathbb{R}$ con $0 \leq a < b \leq 1$.
Suggerimento: Osservare che per una funzione affine g si ha $g(\frac{a+b}{2}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$.

Es. 4 . Sia $K := \{f \in L^2(0,1) := L^2((0,1),\mathbb{R}) : f \geq 0 \text{ q.o. in } (0,1)\}$.

(a) Dimostrare che K è convesso e chiuso in $L^2(0,1)$.

(b) Per ogni $g \in L^2(0,1)$ trovare un'espressione esplicita per la proiezione $P_K(g)$, definita come l'unico elemento di K tale che $\|g - P_K(g)\|_{L^2(0,1)} \leq \|g - f\|_{L^2(0,1)}$ per ogni $f \in K$.

Es. 5. Sia (f_n) una successione in $L^2(0,1)$ e sia $f \in L^2(0,1)$. Supponiamo che

(a) $f_n \to f$ fortemente in $L^1(0,1)$,

(b) $f_n \rightharpoonup f$ debolmente in $L^2(0,1)$.

Dimostrare che $f_n \to f$ fortemente in $L^p(0,1)$ per ogni $p \in (1,2)$. Dare un esempio di (f_n) ed f che soddisfano (a) e (b) e tali che (f_n) non converga ad f fortemente in $L^2(0,1)$.

Es. 6. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2+y^2) - x - y \\ \dot{y} = y(y^2+x^2) + x - y \end{cases}$$

e, per ogni $P \in \mathbb{R}^2$, la sua soluzione $u(t,P) := (x(t,P), y(t,P))$ con dato iniziale $u(0,P) = P$. Discutere l'intervallo massimale (T_P^-, T_P^+) di esistenza della soluzione $u(t,P)$ al variare di P e si disegni il grafico qualitativo della soluzione.

Es. 7. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica, ossia $u(x+2\pi) = u(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, di classe C^2. Denotiamo con u_x ed u_{xx} rispettivamente le derivate prime e seconde di u. Provare che

(a) $\int_0^{2\pi} u_x^4\,dx \leq 9\|u\|_{L^\infty}^2 \int_0^{2\pi} u_{xx}^2\,dx$,

(b) La stessa disuguaglianza vale per ogni funzione 2π-periodica u nello spazio di Sobolev H^2.

Suggerimento: $u_x^4 = (u_x^3 u)_x - 3u_{xx}u_x^2 u$.

Es. 8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che

$$f(x+y) = f(x)f(y)\,, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}\,, \quad f(0) = 1\,.$$

Provare che

(a) $f(x) = e^{ax}$ dove $a := f'(0)$,

(b) lo stesso risultato vale per una funzione f solo continua.

Es. 9. Sia $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile. Si definisca per ricorrenza la successione $f_{n+1}(x) = \int\limits_0^x f_n(t)\,dt$, $n = 1, 2, \ldots$. Provare che la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ è convergente e trovare una espressione chiusa della sua somma.

Es. 10. Sia f una funzione olomorfa, non costante, definita in un intorno del disco unitario. Sia z_0 un punto nel cerchio unitario tale che $f(z_0) = \max\limits_{|z|=1} |f(z)|$. Provare che $\frac{df}{dz}(z_0) \neq 0$.

Ex. 11. Let us consider the linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, with

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

and let us suppose to solve it by the stationary Richardson method with a diagonal pre-conditioner.

(a) Verify that $P^{-1}A$ is symmetric positive definite, compute the optimal acceleration parameter α_{opt}.

(b) Compute explicitly the error reduction factor C in the estimate:

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|_A \leq C\|\mathbf{e}_k\|_A$$

with $\mathbf{e}_k = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k$.

(c) Demonstrate the error estimate:

$$\|\mathbf{e}_k\|_A \leq \frac{C^k}{1-C}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_A.$$

(d) By taking the vector $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T$, provide an estimation of the number of iterations necessary to obtain an error in norm $\|\cdot\|_A < 10^{-9}$.

Ex. 12. Let us consider the following matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Localize the spectrum $\sigma(A)$ of the matrix A by applying the Gershgorin's theorems. Verify the hypothesis thanks to an explicit eigenvalues calculation.

(c) Define the condition number of a matrix and specify its properties when the matrix is symmetric.

Ex. 13. Let us consider the equation $x = \sqrt{a}$, $a > 0$.

(a) Write the Newton method to approximate the root $x = \sqrt{a}$.

(*Hint:* application of the Newton method to a proper equation in the form $f(x, a) = 0$).

(b) Evaluate the convergence range of the method previously developed in (a).

(c) Discuss the order of convergence.

Ex. 14. Let us consider the parabolic problem: find $u : [0, 1] \times [0, 1) \to \mathbb{R}$ such that

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{on}[0,1] \times [0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{per } t \in [0,1) \\ u(x,0) = u_0 & \text{per } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Write the weak formulation of the problem (1), by specifying the functional spaces for the unknown solution and the test function.

(b) Demonstrate the well posedness of the problem and provide an a priori estimate for the solution.

(c) Write the semi-discretization of the problem in space with a Galerkin-Finite Element Method.

(d) Write the algebraic discretization in time with a θ-method, and report its properties in the cases $\theta = 0, 1/2, 1$.

Es. 15 Let us consider the diffusion-transport problem: find $u : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ such that:

$$\begin{cases} -(\mu u')' + bu' = 0 & \text{for } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Let us suppose that $\mu, b \in L^2(0, 1)$, write the weak formulation of the problem (2) by specifying the functional spaces for the unknown solution and the test function.

(b) Let us suppose that μ/b be very small, illustrate a possible stabilization method which is strongly (or fully) consistent, by separating the symmetric and skew-symmetric parts of the operator holding the problem.