SISSA – Area Matematica

Esame di ammissione per il corso di Analisi Matematica, Modelli e Applicazioni

12 settembre 2016

Il candidato risolva CINQUE dei seguenti problemi, e *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Teoria della misura

1. Siano f_k, $f \in L^1(0,1)$, con $f_k \geq 0$, $f \geq 0$ q.o. in $(0,1)$. Supponiamo che $f_k \to f$ puntualmente q.o. in $(0,1)$ e che

$$\int_0^1 f_k \, dx \to \int_0^1 f dx \,.$$

Per ogni a, $b \in \mathbb{R}$ definiamo $a \wedge b := \min\{a,b\}$ e $a \vee b := \max\{a,b\}$.

(a) Dimostrare che $f_k \wedge f \to f$ in $L^1(0,1)$.

(b) Dimostrare che $\displaystyle\int_0^1 (f_k \vee f)\, dx + \int_0^1 (f_k \wedge f)\, dx \to 2\int_0^1 f dx$.

(c) Dimostrare che $f_k \vee f \to f$ in $L^1(0,1)$.

(d) Dimostrare che $f_k \to f$ in $L^1(0,1)$.

2. Sia $(f_n)_n$ una successione limitata in $L^3(\mathbb{R})$, tale che $f_n \to f$ in $L^{3/2}(\mathbb{R})$. Dimostrare che $f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R})$.

3. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, con $f \geq 0$ q.o. in $\mathbb{R}^n$ e sia $g \colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ la funzione definita da

$$g(x) := \int_{B(x,|x|/2)} f(y)\, dy \,,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma euclidea e $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r \geq 0$.

(a) Dimostrare che g è continua.

(b) Dimostrare che $g(x) \to 0$ per $|x| \to \infty$.

(c) Dimostrare che g ha un punto di massimo in $\mathbb{R}^n$.

Equazioni differenziali

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t^2}{2+\sin(t^2)}\cos(y(t)^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Dimostrare che esiste una e una sola soluzione definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(b) Dimostrare che $y(t) \to \sqrt{\pi/2}$ per $t \to +\infty$.

5. Siano $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ e $\partial B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$. Trovare una funzione $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{per } (x,y) \in B\,, \\ u(x,y) = x^2 & \text{per } (x,y) \in \partial B\,, \end{cases}$$

dove $\Delta u(x,y) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$.

6. Sia $u \in C^2(\mathbb{R})$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$-u''(t) + u(t) = u(t)^3\,, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) Dimostrare che esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{1}{2}|u'(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(t)|^2 + \frac{1}{4}|u(t)|^4 = C \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(b) Dimostrare che $C = 0$, qualora u soddisfi anche la condizione

$$\lim_{|t|\to\infty} u(t) = 0. \tag{3}$$

(c) Dimostrare che ogni soluzione pari di (1) soddisfacente (3) verifica $|u(0)|^2 = 2$ o $u(0) = 0$.

(d) Dimostrare che esistono esattamente tre soluzioni pari di (1) verificanti anche (3).

Ricordiamo che una funzione u si dice pari se $u(t) = u(-t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

7. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri il problema ai due punti

$$\begin{cases} y''(t) = \sin(\alpha y(t)) + (\cos(\alpha) - 1)\sin(t)\,, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0\,, \end{cases} \tag{4}$$

e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ed ogni $\beta \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) = \sin(\alpha y(t)) + (\cos(\alpha) - 1)\sin(t)\,, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \beta\,. \end{cases} \tag{5}$$

(a) Dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ed ogni $\beta \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione $y_{\alpha,\beta}$ del problema di Cauchy (5) definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(b) Calcolare $y_{\alpha,\beta}(t)$ per $\alpha = 0$.

(c) Sapendo che $\alpha \mapsto y_{\alpha,\beta}(t)$ è continua in $\mathbb{R}$ per ogni $\beta,\ t \in \mathbb{R}$, dimostrare che per $|\alpha|$ piccolo esiste almeno una soluzione del problema (4).

Analisi funzionale

8. Sia $T\colon L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ l'operatore lineare definito da

$$(Tu)(x) = \int_0^x u(t)\,dt \quad \text{per ogni } x \in (0,1)\,.$$

(a) Dimostrare che T è compatto.

(b) Trovare lo spettro di T.

9. Sia $\psi \in L^2(0,1)$ e sia

$$K_\psi = \{\ u \in L^2(0,1) : u \geq \psi \ \text{ q.o. in } (0,1)\ \}\,.$$

(a) Dimostrare che il problema di minimo

$$\min_{u \in K_\psi} \int_0^1 |u|^2 dx$$

ha un'unica soluzione $u_\psi \in K_\psi$.

(b) Determinare esplicitamente la soluzione u_ψ.

10. Siano V uno spazio di Banach, $X \subset V$ un sottoinsieme debolmente chiuso e $Y \subset V$ un sottoinsieme debolmente compatto. Supponiamo che $X \cap Y = \emptyset$ e sia $d(X,Y) = \inf\{\|x-y\|\,, x \in X, y \in Y\}$.

(a) Dimostrare che $d(X,Y) > 0$.

(b) La conclusione del primo punto è ancora vera se si suppone solo che entrambi i sottoinsiemi X e Y siano debolmente chiusi? Se sì, dare una dimostrazione; se no, fornire un controesempio.

Analisi numerica

11. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, il cui bordo $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ è regolare, dove Γ_D e Γ_N sono unione di un numero finito di archi e $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Introducendo opportuni spazi funzionali, si scriva la formulazione debole del seguente problema di elasticità lineare

$$\begin{cases} -\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = f_i & \text{in } \Omega, i = 1, 2, \\ u_i = 0 & \text{su } \Gamma_D, i = 1, 2, \\ \sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j = g_i & \text{su } \Gamma_N, i = 1, 2, \end{cases} \tag{6}$$

dove si è indicato con $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ il versore normale esterno a $\partial\Omega$, con $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ il vettore delle incognite, e con $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ e $\mathbf{g} = (g_1, g_2)^T$ due funzioni a valori vettoriali (note). Inoltre, per $i, j = 1, 2$, sia

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}(\mathbf{u}), \quad \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big),$$

dove λ e μ sono costanti positive e δ_{ij} è la delta di Kronecker. Il sistema di equazioni così ottenuto permette di descrivere lo spostamento $\mathbf{u}$ di un corpo elastico, omogeneo e isotropo, il quale occupa all'equilibrio la regione Ω, sotto l'azione di una forzante esterna volumetrica, la cui densità è $\mathbf{f}$, e di una trazione sulla superficie Γ_N con intensità $\mathbf{g}$. Inoltre, si illustri brevemente la tecnica di discretizzazione basata su elementi finiti e si descriva la formulazione matriciale del problema.

12. Si ricavi la formulazione debole del seguente problema applicando la formula di Green:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio con bordo regolare $\partial\Omega$, $\Delta^2 \cdot = \Delta\Delta \cdot$ è l'operatore bilaplaciano, $f \in L^2(\Omega)$ è una funzione assegnata. Si introducano un adeguato spazio funzionale, la sua norma e semi-norma. Si dimostri la coercitività e continuità dell'operatore. Si dimostre l'esistenza e l'unicità della soluzione. Infine, si introduca uno schema di discretizzazione adeguato.

13. Sia A una matrice $n \times n$ non singolare con autovalori reali, e si consideri lo schema iterativo:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha(b - Ax^k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Si supponga che A abbia sia autovalori positivi che negativi. Si mostri che per ogni $\alpha \neq 0$, esiste almeno un vettore iniziale x^0 tale che il metodo iterativo diverge.

(b) Si supponga che A abbia autovalori solo positivi. Si derivino le condizioni su α in base alle quali il metodo iterativo converge per ogni x^0. Si mostri come scegliere α in modo che il raggio spettrale di $(I - \alpha A)$ sia minimo.

14. Si desidera calcolare lo zero α della funzione $f(x) = x^3 - 2$ con il metodo di punto fisso $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ dato da:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} \left(1 - \frac{\omega}{3}\right) + (x^{(k)})^3(1-\omega) + \frac{2\omega}{3(x^{(k)})^2} + 2(\omega - 1), \quad k \geq 0,$$

dove $\omega \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

(a) Per quali valori del parametro ω la radice della funzione f è un punto fisso?

(b) Per quali valori di ω il metodo è almeno di ordine 2?

(c) Esiste un valore di ω tale che l'ordine del punto fisso è maggiore di 2?

15. Si consideri il problema: trovare $y\colon [0,T) \mapsto \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{8}$$

(a) Si introduca una discretizzazione per il problema (8) basata su differenze finite, usando lo schema di Eulero in avanti.

(b) Sia h il passo temporale della versione discretizzata del problema (8). Indicare la condizione di assoluta stabilità su h.

(c) Si consideri il seguente sistema perturbato:

$$\begin{cases} z'(t) = \lambda z(t) + \delta(t) \\ z(0) = y_0 + \delta_0. \end{cases} \tag{9}$$

Le approsimazioni numeriche delle soluzioni dei problemi (8) and (9) con metodo di Eulero in avanti sono indicate con y_n and z_n, rispettivamente. Si scriva il sistema per la differenza w_n tra la soluzione numerica perturbata e quella non perturbata. È inoltre possibile dimostrare che vale la seguente stima:

$$|y_n - z_n| \leq C\epsilon \qquad \forall n \qquad \text{per } |\delta(t)| \leq \epsilon$$

assumendo che il passo temporale h rispetti le condizioni di stabilità ricavate al punto precedente.

Meccanica dei continui

16. Un campo tensoriale euleriano A è obiettivo se, al variare dell'osservatore, vale la seguente legge di trasformazione

$$A^*(x^*, t) = Q(t)A(x, t)Q^T(t)$$

dove $x^*(p, t) = q(t) + Q(t)(x(p, t,) - O)$ è il moto rigido che descrive il cambiamento di osservatore. O è l'origine, $q(t)$ un punto dello spazio e $Q(t)$ una rotazione per ogni t. Si supponga che A sia differenziabile e obiettivo, e si denoti con $L = \operatorname{grad} \mathrm{v}$ il gradiente della velocità euleriana e con W la sua parte antisimmetrica. Quali tra le seguenti derivate temporali sono obiettive?

(a) $\dot{A}$,

(b) $\dot{A} + L^T A + AL$,

(c) $\dot{A} - WA + AW$.

17. Si consideri un corpo costituito da un materiale elastico isotropo e omogeneo. A partire dalla configurazione naturale, il corpo viene caricato con una pressione positiva uniforme, lentamente crescente nel tempo. Nell'ipotesi che le deformazioni siano piccole e sia applicabile la teoria dell'elasticità lineare, si dimostri che il volume del corpo diminuisce.

18. Si dimostri il principio di Archimede che afferma che un corpo immerso in un fluido in quiete è soggetto a una spinta verso l'alto pari al peso del liquido spostato. Resta vero questo principio se il corpo è solo parzialmente immerso?

19. La derivata temporale della quantità di moto di un corpo continuo in moto può essere calcolata come prodotto della massa del corpo per l'accelerazione del suo baricentro. Si dimostri questa proprietà.

20. Il tensore degli sforzi di Cauchy è uno dei costrutti fondamentali della meccanica classica dei mezzi continui. Sotto opportune ipotesi, è un tensore simmetrico.

(a) Si discuta il significato fisico di questa proprietà di simmetria.

(b) Si fornisca una dimostrazione di questa proprietà di simmetria.