SISSA – Area Matematica

Esame di ammissione per il corso di Analisi Matematica, Modelli e Applicazioni

2 maggio 2017

Il candidato risolva CINQUE dei seguenti problemi, e *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Teoria della misura

1. Siano $f_k\,,\ f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ funzioni misurabili e siano $g_k\,,\ g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$g_k(x) = f_k(x^2) \quad \text{e} \quad g(x) = f(x^2)$$

per ogni $x \in [0,1]$.

(a) Dimostrare che, se $f_k \to f$ in $L^p([0,1])$ per qualche $p > 2$, allora $g_k \to g$ in $L^1([0,1])$.

(b) Si considerino le funzioni

$$f_k(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}\log x} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2k}, \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } \frac{1}{2k} \le x < 1; \end{cases}$$

dimostrare che $f_k \to 0$ in $L^2([0,1])$ e che $g_k \notin L^1([0,1])$.

2. Sia $\{f_n\} \subset L^1([0,1])$ una successione di funzioni tali che

(a) $f_n \to 0$ quasi ovunque;

(b) $\displaystyle\sup_n \int_0^1 (f_n^-)^2 < +\infty$, dove g^- indica la parte negativa di una funzione, $g^-(x) = -\min\{0, g(x)\}$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 f_n \to 0.$

Si provi che $f_n \to 0$ in $L^1([0,1])$. Suggerimento: si provi prima che $f_n^- \to 0$ in $L^1([0,1])$ e si usi l'uguaglianza $|g| = g + 2g^-$ valida per ogni funzione g.

3. Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e per ogni $t > 0$ si definisca $A_t := \{x \in [0,1]\colon |f(x)| > t\}$.

(a) Si mostri che

$$\limsup_{p\to+\infty} \frac{\int_0^1 |f|^{p+1}}{\int_0^1 |f|^p} \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,1]} |f(x)| \ ;$$

(b) Si mostri che per ogni $t > 0$ tale che $|A_t| > 0$, cioè la misura di Lebesgue di A_t è strettamente positiva, si ha

$$\liminf_{p\to+\infty} \int_{A_t} \left|\frac{f(x)}{t}\right|^p dx = +\infty \ ;$$

(c) Si mostri che per ogni $t > 0$ tali che $|A_t| > 0$ si ha

$$\liminf_{p\to+\infty} \frac{\int_0^1 |f|^{p+1}}{\int_0^1 |f|^p} \ge t.$$

Equazioni differenziali

4. Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y^2(x)}{1-y^2(x)}, \\ y(0) = 1/2, \end{cases}$$

e si calcolino i limiti

$$\lim_{x\to 1/2-} y(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1/2-} y'(x).$$

5. Sia $\omega\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una funzione continua tale che $\omega(0) = 0$ e $\omega(y) > 0$ per ogni $y > 0$, e sia $y\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una funzione C^1 tale che

$$\begin{cases} |y'(x)| \le \omega(y(x)) \quad \forall x \in [0,+\infty), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Si provi che

(a) se

$$\int_0^1 \frac{dy}{\omega(y)} = +\infty,$$

allora $y(x) = 0$ per ogni $x \in [0,+\infty)$;

(b) se

$$\omega(y) \le \frac{y^{1-\alpha}}{\alpha} \qquad \forall y \in (0,1) \quad \forall \alpha \in (0,1),$$

allora $y(x) = 0$ per ogni $x \in [0,+\infty)$. (Suggerimento: per $y \in (0,1)$ si calcoli $\inf_{\alpha\in(0,1)} \frac{y^{1-\alpha}}{\alpha}$).

6. Si trovi una soluzione u di classe $C^1((0,\infty)^2) \cap C^0([0,\infty)^2)$ dell'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} \partial_x u(x,y) + \partial_y u(x,y) = u(x,y), \quad x,y > 0, \\ u(0,y) = \sin(y), \\ u(x,0) = -\sin(x). \end{cases}$$

Si mostri che tale soluzione è l'unica soluzione di classe $C^1((0,\infty)^2) \cap C^0([0,\infty)^2)$.

Analisi funzionale

7. Per ogni intero $k \ge 1$ sia $T_k\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ l'operatore lineare e continuo definito da

$$(T_k u)(x) = u(x + \tfrac{1}{k}) .$$

Sia I l'operatore identità su $L^2(\mathbb{R})$ e sia $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ lo spazio di Banach degli operatori lineari e continui da $L^2(\mathbb{R})$ in se stesso dotato della norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}} := \sup\{\|Tu\|_{L^2} : u \in L^2(\mathbb{R}),\ \|u\|_{L^2} \le 1\}.$$

(a) Dimostrare che per ogni $u \in L^2(\mathbb{R})$ si ha $T_k u \to u$ fortemente in $L^2(\mathbb{R})$.

(b) Dimostrare che la successione delle norme $\|T_k - I\|_{\mathcal{L}}$ non tende a 0 per $k \to +\infty$.

8. Si consideri l'operatore

$$T : C([0,1]) \to C([0,1]), \qquad (Tu)(x) = \int_0^{x^2} u(\sqrt{s})\, ds.$$

Si mostri che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ non esiste $u \in C([0,1])$ soluzione non identicamente nulla dell'equazione $Tu = \lambda u$.

9. Sia (X,d) uno spazio metrico completo e sia $F : X \to X$ una mappa da X in sé. Si definisca l'n-esima iterata di F come

$$F_n(x) := \underbrace{(F \circ F \circ \cdots \circ F)}_{n\text{-volte}}(x)$$

e si assuma che esista $\alpha_n \geq 0$ tale che

$$d(F_n(x), F_n(y)) \leq \alpha_n d(x,y), \qquad \forall x, y \in X.$$

Si provi che, se $\sum_n \alpha_n < +\infty$, allora esiste un unico $\bar{x} \in X$ tale che $F(\bar{x}) = \bar{x}$.

10. Dato lo spazio $X = \{u \in C^1([-1,1]) \colon u(-1) = 0,\ u(1) = 1\}$, si consideri il funzionale $I : X \to [0, \infty)$ definito come segue:

$$I(u) := \int_{-1}^{1} (u'(x))^2 (1 - u'(x))^2 dx;$$

si dimostri che $\inf_{u \in X} I(u) = 0$ e che tale inf non è assunto in X.

Analisi numerica

11. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -\alpha^2 & 1 & 0 \\ 0 & -4\alpha & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{b}$ è tale che $\mathbf{x} = [1,1,1]^T$ è soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Definire il metodo di Jacobi per la risoluzione numerica del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Definire e calcolare la sua matrice di iterazione.

(b) Definire il metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione numerica del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Definire e calcolare la sua matrice di iterazione.

(c) Discutere per quali valori di α sia il metodo di Jacobi sia il metodo di Gauss-Seidel convergono. Quale dei due converge più velocemente? Enunciare (senza dimostrazione) tutti i risultati di convergenza utilizzati.

12. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione regolare tale che $f'(x) > 0$, e sia α una delle sue radici. Il metodo di punto fisso

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2\left[f'(x_n)\right]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

per risolvere l'equazione nonlineare $f(x) = 0$ è noto come metodo di Halley.

(a) Sia $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$. Mostrare che il metodo di Halley è equivalente al metodo di Newton applicato a $g(x)$.

(b) Sia α una radice semplice di f. Mostrare che la convergenza del metodo di Halley è almeno cubica. Confrontare tale ordine con l'ordine di convergenza del metodo di Newton.

13. Quale è il massimo grado di esattezza che si può ottenere con la seguente formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

Riportare tutte le definizioni necessarie ed i teoremi utilizzati (senza dimostrazione). Calcolare i pesi w_0, w_1 ed i nodi x_0, x_1 in modo che la formula abbia grado di esattezza massimo.

14. Il *metodo di Eulero modificato* per il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), & t \in [0,T) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

è dato dalla seguente formula

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n)\right),$$

dove $y_n \approx y(t_n)$ e $t_{n+1} = t_n + h$.

(a) Riportare una dimostrazione diretta della convergenza del metodo. Quale è l'ordine di convergenza?

(b) Questo metodo è un caso particolare appartenente ad una classe di metodo espliciti. Riportare il nome di questa classe, la formulazione di tali metodi, ed un riassunto (senza dimostrazioni) dei principali risultati teorici per quanto riguarda consistenza, stabilità e convergenza di tali metodi.

(c) Sia p l'ordine di convergenza del metodo di Eulero modificato, come dimostrato al punto (a). Esso è il solo, tra tutti i metodi individuati al punto (b), ad avere ordine di convergenza uguale a p e richiedere due valutazioni di f? In caso negativo, riportare altri metodi che soddisfano questi requisiti.

15. Si considere il seguente problema di diffusione trasporto: trovare $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{cases} -(\mu u')' + bu' = 0, & \text{per } x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 1, \end{cases}$$

dove $\mu = \mu(x)$ e $b = b(x)$.

(a) Scrivere la formulazione debole del problema, specificando gli spazi funzionali per la soluzione e le funzioni test. Riportare eventuali ulteriori ipotesi su μ e b.

(b) Discutere la buona posizione del problema. Enunciare (senza dimostrazioni) tutti i teoremi utilizzati. Riportare eventuali ulteriori ipotesi su μ e b.

(c) Supporre ora che il problema sia a "trasporto dominante", i.e., $\|\mu\|/\|b\|$ è molto piccolo. Discutere possibili metodi di stabilizzazione.

Meccanica dei continui

16. Le equazioni di Navier-Stokes seguono da

(a) bilancio della quantità di moto,

(b) una equazione costitutiva che esprime il tensore degli sforzi di Cauchy in funzione del gradiente di velocità.

Spiegare perché il tensore di Cauchy non può dipendere dalla parte anti-simmetrica del gradiente di velocità, e fornire una derivazione delle equazioni di Navier-Stokes a partire da (a) e (b).

17. Si enunci e dimostri l'equazione che esprime il bilancio della quantità di moto per un volume di controllo (fisso nello spazio).

18. Il tensore degli sforzi di Cauchy è coniugato al tensore di stretching (la parte simmetrica del gradiente di velocità), nel senso che il loro prodotto definisce una potenza per unità di volume.

(a) Si dimostri che il primo tensore di Piola-Kirchhoff è coniugato con la derivata temporale del gradiente di deformazione.

(b) Si esibisca un'altra coppia di sforzi/velocità di deformazione coniugati (dimostrando che gli elementi della coppia sono effettivamente coniugati).

19. Il *taglio semplice* è una deformazione $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ tale che (in componenti cartesiane)

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \gamma\, x_2\,, \\ y_2 &= x_2\,, \\ y_3 &= x_3\,, \end{aligned}$$

dove γ è uno scalare. Si determinino gli stretch principali supponendo γ positivo.

20. Si consideri un tubo capillare cilindrico sottile di raggio costante $r = 100\,\mu\text{m}$ e spessore $t = 10\,\mu\text{m}$, soggetto alla pressione interna p. Data la tensione di rottura del vetro $\sigma_{\text{f}} = 40$ MPa, si stimi la pressione di rottura p_{f} del capillare (per semplicità, si assuma il capillare di lunghezza infinita).