

SISSA – Area Matematica

Esame di ammissione per il corso di Analisi Matematica, Modelli e Applicazioni

12 aprile 2018

Il candidato risolve CINQUE dei seguenti problemi, e *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Analisi Matematica

1. Sia $f: L^1([0, 2])$, sia $\psi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una funzione e sia $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(t) = \int_0^1 f(x + \psi(t)) dx \quad \text{per ogni } t \in [0, 1].$$

Si dimostri che

(a) se ψ è continua, allora F è continua;

(b) se $\psi \in C^1([0, 1])$ e $\psi'(t) > 0$ per ogni $t \in [0, 1]$, allora F è derivabile per quasi ogni $t \in [0, 1]$.

2. Sia (f_n) una successione limitata in $L^1([0, 1])$.

(a) Si dimostri che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx < +\infty \quad \text{per quasi ogni } x \in [0, 1].$$

(b) Trovare un esempio di successione (g_n) limitata in $L^1([0, 1])$ tale che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx = +\infty \quad \text{per quasi ogni } x \in [0, 1].$$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x))^2 - 2, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Si dimostri che

(a) la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = -\sqrt{2}$,

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$.

4. Sia y la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = -y(x)^3, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Si dimostri che

(a) $\frac{1}{2}(y'(x))^2 + \frac{1}{4}(y(x))^4 = \frac{1}{4}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ per cui $y(x)$ è definita,

(b) $y(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$,

(c) $y(-x) = y(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,

(d) la funzione y è periodica.

5. Sia $A: \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}) \mapsto \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C})$ un operatore lineare limitato sullo spazio

$$\ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}) := \left\{ (u_i)_{i \in \mathbb{Z}}, u_i \in \mathbb{C}, \|u\|_2^2 := \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_i|^2 < +\infty \right\}.$$

Denotiamo con A_j^i gli elementi di matrice definiti da

$$(Au)_j := \sum_{i \in \mathbb{Z}} A_j^i u_i, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

La norma operatoriale di A è definita da $\|A\| := \sup_{\|u\|_2 \leq 1} \|Au\|_2$. Si dimostri che

(a) $\sup_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |A_j^i|^2 \leq \|A\|^2$,

(b) l'operatore lineare B definito dagli elementi di matrice

$$B_j^i := \frac{|A_j^i|}{|i-j|}, \quad \forall i \neq j, \quad B_i^i := 0,$$

è limitato e $\|B\| \leq C\|A\|$ per una opportuna costante $C > 0$ indipendente da $\|A\|$.

6. Sia $A: H \rightarrow H$ un operatore lineare *ovunque* definito su uno spazio di Hilbert H . Supponiamo che A sia simmetrico, ossia

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{per ogni } x, y \in H,$$

dove (\cdot, \cdot) denota il prodotto scalare su H . Provare che A è limitato.

7. Sia $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si assuma che

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}} f(nx) = 0 \quad \text{per tutti gli } x > 0.$$

(a) Mostrare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

(b) Mostrare che l'affermazione del punto (a) non è corretta se si assume solo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}} f(2^n x) = 0 \quad \text{per tutti gli } x > 0.$$

8. Siano $u_0, u_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni periodiche di periodo 2π e di classe C^∞ . Usando la serie di Fourier nella variabile x , si esibisca una soluzione (periodica in x di periodo 2π) del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u + \partial_t u + \partial_x u &= 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

9. Sia m una misura di probabilità borelliana su $[0, 1]$, e sia $m \otimes m$ la misura prodotto di probabilità su $[0, 1]^2$.

(a) Mostrare che esistono una sequenza di punti $x_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, e una misura borelliana m^c su $[0, 1]$ tali che

$$m = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \delta_{x_n} + m^c,$$

dove $c_n := m(\{x_n\})$, δ_x è la delta di Dirac in x e $m^c(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in [0, 1]$.

(b) Sia $D = \{(x, y) : x = y\} \subset [0, 1]^2$. Si provi che

$$m \otimes m(D) = \sum_n c_n^2.$$

(c) Si dimostri

$$\max \{m(\{x\}), x \in [0, 1]\} \geq m \otimes m(\{(x, y) : x = y\}).$$

10. Si consideri l'insieme

$$K = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) : f(0) = 0, |f'(x)| \leq 1\} \subset C^0([0, 1], \mathbb{R}).$$

- (a) Si mostri che K è precompatto in $C^0([0, 1])$.
- (b) Si mostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ è possibile ricoprire l'insieme K con 4^n palle chiuse di $C^0([0, 1])$ con raggio $1/n$. (Si suggerisce di considerare palle centrate in opportune funzioni affini a tratti con pendenza ± 1).

Analisi Numerica

11. Per evitare di calcolare ripetutamente e^x , costruiamo un array di valori equi-spaziati di e^x . Successivamente, per un dato valore di x , si utilizza una interpolazione lineare con i valori dell'array più vicini in modo da ottenere una efficiente approssimazione per e^x .

- (a) Dare una derivazione della formula dell'errore per l'interpolazione lineare.
- (b) Utilizzare la formula dell'errore appena calcolata per stimare il minor numero di intervalli in $[0, 1]$ richiesti per assicurare che l'errore nel valore approssimativo per e^x sia inferiore a $1/2 \times 10^{-6}$ per ogni $x \in [0, 1]$. Giustificare la stima ottenuta.

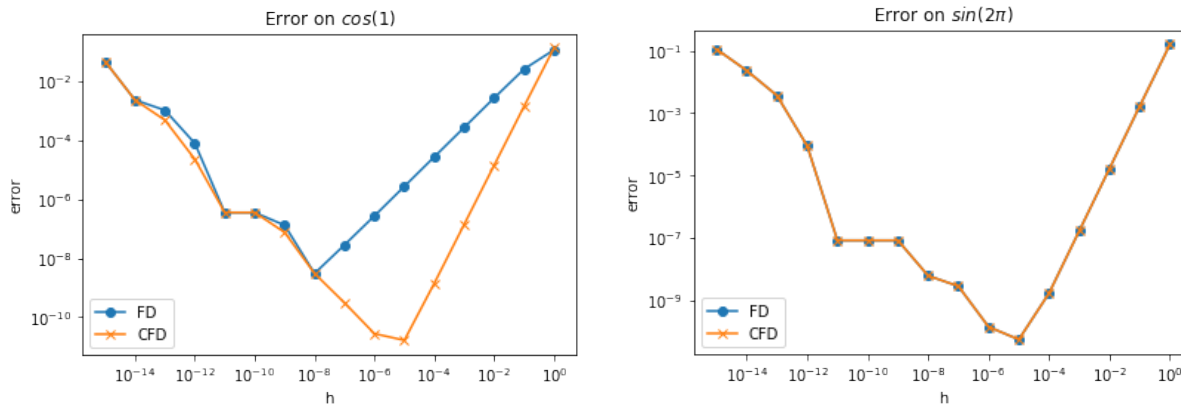
12. Considerare i seguenti due algoritmi per calcolare numericamente la derivata di una funzione:

(I) $FD(f; x; h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(II) $CFD(f; x; h) := \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

Applichiamo i due algoritmi alle funzioni $\cos(x)$ e $\sin(x)$, valutate rispettivamente nei punti $x = 1$ e $x = 2\pi$.

Tracciando i valori di $e_{FD} := |FD(\cos; 1; h) - \sin(1)|$ ed $e_{CFD} := |CFD(\sin; 1; h) - \cos(2\pi)|$ per diversi valori di h si ottengono i grafici seguenti:



- (a) Si dia una spiegazione per la differenza nell'inclinazione dell'errore sul grafico di sinistra quando $h \in [10^{-5}, 10^0]$.
- (b) Dare una motivazione sul perchè i grafici dell'errore (sia a sinistra che a destra) mostrano una diminuzione fino ad un certo valore di h , e successivamente tornano a crescere.
- (c) Dare una motivazione sul perchè i grafici degli errori a destra differiscono da quelli a sinistra, fornendo una stima dell'errore di troncamento nei due casi considerati.

13. Si consideri il sistema linear $Ax = b$, con $x, b \in \mathbb{R}^n$ e $A = M - N \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si assuma che la matrice M sia non-singolare e che $(M^{-1}N)^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

- (a) Mostrare che l'iterazione x_k definita da

$$Mx_{k+1} = Nx_k + b,$$

converge ad $x = A^{-1}b$ per qualunque vettore iniziale x_0 .

- (b) Si trovi uno splitting $A = M - N$ per la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$, tale che l'iterazione in (a) sia convergente. Si giustifichi la propria risposta.

14. Sia A una matrice $n \times n$ singolare e simmetrica con autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_i > 0$ per $i = 2, 3, \dots, n$. Sotto quali condizioni sul fattore α , sul vettore b e sulla iterata iniziale x^0 , il seguente algoritmo iterativo converge ad una soluzione di $Ax = b$?

$$\begin{aligned} x^* &= b - (A - I)x^n \\ x^{n+1} &= \alpha x^* + (1 - \alpha)x^n \end{aligned}$$

Si giustifichi la risposta.

15. Si assuma che $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sia una funzione liscia. Sia $\epsilon > 0$ e si considerino le tre coppie di punti $(0, f(0))$, $(\epsilon, f(\epsilon))$ e $(1, f(1))$. Sia $p(x)$ l'interpolazione polinomiale ottenuta come limite dell'interpolatore polinomiale dei dati quando $\epsilon \rightarrow 0$.

- (a) Qual è il grado di $p(x)$?
- (b) Quali punti (se ve ne sono) vengono interpolati da $p(x)$?
- (c) Quali punti (se ve ne sono) vengono interpolati da $p'(x)$?

Meccanica dei Continui

16. Si consideri il flusso bidimensionale, non-stazionario di un fluido incomprimibile il cui campo di velocità è dato da $\mathbf{v}(x_1, x_2, t) = \alpha x_1 x_2 \mathbf{e}_1 + v_2(x_2, t) \mathbf{e}_2$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ è una base ortonormale in \mathbb{R}^2 , $t > 0$ è il tempo e $x_i, i = 1, 2, 3$ sono le variabili spaziali. Il campo (omogeneo) di densità è $\rho(x_1, x_2) = \rho_0 > 0$. Determinare la componente di velocità $v_2(x_2, t)$ tale che $v_2(1, t) = \beta \exp(-t)$, $\beta \in \mathbb{R}$. Sia $\mathcal{B} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \in \mathbb{R}^3$ un volume di controllo fisso. Calcolare il tasso (istantaneo) di variazione della quantità di moto totale delle particelle di fluido contenute in \mathcal{B} al tempo $t = \bar{t}$.

17. Si consideri un flusso stazionario ed irrotazionale con campo di velocità \mathbf{v} , densità ρ e sforzo di Cauchy \mathbf{T} sferico, ovvero $\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I}$ con π un campo scalare. Si derivi il teorema di Bernoulli nell'ipotesi di forze di volume \mathbf{b} conservative con potenziale β .

18. Un gesso da lavagna cilindrico con sezione circolare di raggio $r = 5 \text{ mm}$ è soggetto alle estremità a momenti torcenti di modulo T . Data la tensione di rottura del gesso $\sigma_f = 1 \text{ MPa}$, si calcoli la coppia torcente di rottura T_f del gessetto.

19. Un corpo cilindrico elastico è soggetto alle basi a trazioni (per unità di area di riferimento) $\mathbf{S}\mathbf{n} = \sigma \mathbf{n}$, dove \mathbf{S} è il primo tensore di Piola-Kirchhoff, $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_1$ è la normale unitaria uscente rispetto alle basi del cilindro ed \mathbf{e}_1 è il versore diretto lungo il suo asse. Si determini la relazione tra il parametro di carico σ e lo stretch principale lungo l'asse del cilindro nell'ipotesi di comportamento costitutivo neo-Hookeano incomprimibile (per un materiale neo-Hookeano incomprimibile lo sforzo di Cauchy $\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I} + \mu \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, dove μ è il modulo di taglio del materiale, π è il moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo di incomprimibilità e \mathbf{F} è il gradiente di deformazione).

20. Siano $\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ e $\mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{F}$, rispettivamente, le decomposizioni polari *destra* e *sinistra* del gradiente di deformazione \mathbf{F} . Si derivino le leggi di trasformazione di \mathbf{F} , \mathbf{R} , \mathbf{U} e \mathbf{V} dovute ad un cambiamento di osservatore.