**SISSA – Area Matematica**

*Esame di ammissione per il corso di Analisi Matematica, Modelli e Applicazioni*

*5 settembre 2018*

Il candidato risolva CINQUE dei seguenti problemi, e *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

# Analisi Matematica

**1.** Sia $f_n$ un'approssimazione dell'identità in $L^1(\mathbb{R})$:

- $f_n \geq 0$;
- $\int f_n = 1$;
- per ogni $\delta > 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \int_{|t|\geq\delta} f_n(t)dt = 0$.

Si mostri che $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p} = \infty$, per ogni $p > 1$.

**2.** Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme misurabile con $|A| > 0$, i.e. avente misura di Lebesgue strettamente positiva. Si mostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $A$ contiene una progressione aritmetica di lunghezza $n$, ossia che esistono $\varepsilon > 0$ e $x_1, \ldots, x_n \in A$ tali che $x_i - x_{i+1} = \varepsilon$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$.

**3.** Sia $y = y(x)$ l'unica soluzione per il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \ln(\sqrt{1+y^2}), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

(a) Si mostri che se $y_0 > 0$, allora $y$ è strettamente crescente e convessa; se $y_0 < 0$, allora $y$ è strettamente crescente e concava.

(b) Si mostri che $y$ è definita globalmente.

**4.** Si consideri la seguente EDP

$$\partial_t u + u\partial_x u = u, \qquad u(0,x) = u_0(x) = -\tanh(x).$$

Siano $X(t,y,z), U(t,y,z)$ le soluzioni per il problema di Cauchy per il sistema di EDO

$$\frac{dX}{dt} = U(t), \qquad \frac{dU}{dt} = U(t), \quad X(0,y,z) = y,\ U(0,y,z) = z.$$

(a) Si mostri che la funzione implicitamente definita da

$$u(t, X(t,y,u_0(y))) = U(t,y,u_0(y)),$$

è una soluzione di classe $C^1$ per la EDP in un intervallo di tempo sufficientemente piccolo. [Hint: Si usi il Teorema della Funzione Implicita.]

(b) Si stimi il tempo massimale per cui la soluzione data dal Punto (a) può essere calcolata.

**5.** Si mostri che una funzione continua e periodica avente due periodi incommensurabili è costante. Si mostri che l'equazione differenziale $\dot{x} + a(t)x = b(t)$ non può avere tre soluzioni $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ non costanti e periodiche con periodi mutualmente incommensurabili.

**6.** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico compatto e $f : X \to X$ un'isometria:

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)), \qquad \forall\, x, y \in X.$$

Si mostri che $f$ è suriettiva. Si mostri che compattezza di $(X, d)$ è necessaria.

**7.** Sia $f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$. Si mostri che l'equazione $f_n(x) = 0$ non ha radici reali.
[Hint: Si usi l'Induzione.]

**8.** Sia $H$ uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ e $T : H \to H$ un operatore lineare della forma

$$Tx = \sum_n (x, a_n) b_n,$$

dove $a_n, b_n \in H$ e

$$\sum_n |a_n||b_n| < \infty.$$

Si mostri che se $x_n \in H$ è una successione debolmente convergente, allora $Tx_n$ converge fortemente.

**9.** (a) Sia $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa e si assuma che la funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfi

$$L(u(x)) + L(u(y)) \leq L\left(\frac{u(x)+u(y)}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + L\left(\frac{u(x)+u(y)}{2} - \frac{x-y}{2}\right),$$

per tutti gli $x, y \in \mathbb{R}$. Si mostri che la funzione $u$ è Lipschitz.
[Hint: Si usi la stretta convessità nel punto $(u(x) + u(y))/2$.]
(b) Sia $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ di classe $C^2$ e uniformemente convessa, i.e.

$$\frac{1}{C}|v|^2 \leq v^T \nabla^2 L(x) v \leq C|v|^2.$$

Si assuma che la funzione $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ soddisfi

$$L(u(x)) + L(u(y)) \leq L\left(\frac{u(x)+u(y)}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + L\left(\frac{u(x)+u(y)}{2} - \frac{x-y}{2}\right),$$

per tutti gli $x, y \in \mathbb{R}$. Si mostri che la funzione $u$ è Lipschitz.
[Hint: Si usi l'espansione di Taylor intorno al punto $(u(x) + u(y))/2$.]

**10.** Sia $E \subset C[0, 1]$ un sottospazio finito dimensionale e $f_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots,$ una successione tale che per $n \to \infty$ si ha $\|f_n\| \to \infty$. Si mostri l'esistenza di un segmento $\Delta \subset [0, 1]$ e di una sottosuccessione $f_{n_m}$, $m = 1, 2, \ldots,$ tale che $\min_{x \in \Delta} |f_{n_m}(x)| \to \infty$ per $m \to \infty$.

## Analisi Numerica

**11.** Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0,$$

con $t \in [0, T]$ e $T > 0$.

(a) Si illustrino i passi necessari per implementare un algoritmo che risolva il problema utilizzando un metodo di integrazione in tempo implicito. Si descrivano le caratteristiche del metodo scelto.

Si assuma che $\boldsymbol{f}$ sia una funzione nonlineare in entrambi gli argomenti. Si illustrino i due metodi seguenti per la risoluzione dell'equazione nonlineare generata dalla discretizzazione in tempo in (a):

(b) metodo iterativo di punto fisso,

(c) metodo di Newton.

**12.** Si consideri la seguente equazione differenziale

$$-u'' + qu' = 1 \text{ in } [0, \pi] \tag{1}$$

con $q \in \mathbb{R}$.

(a) Si derivi la formulazione debole dell'equazione differenziale (1) con condizioni al contorno $u(0) = u(\pi) = 0$. Si specifichi lo spazio funzionale $V$ in cui ti aspetti di cercare la soluzione debole $u$.

(b) Si dimostri che la forma bilineare $a(\cdot, \cdot)$ introdotta in (a) è coerciva, i.e. che esiste $\alpha > 0$ tale che $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ per ogni $v \in V$.

(c) Si derivi la formulazione debole dell'equazione differenziale (1) con condizioni al contorno $u(0) = 0, u'(\pi) = 0$. Si esplici il corrispondente spazio funzionale $W$.

(d) Si dimostri che esiste $q \in \mathbb{R}$ e $v \in W$ tale che la forma bilineare introdotta in (c) non è coerciva, si riporti un controesempio con un valore di $q$ e una espressione esplicita di $v$.

(e) Sia $m \in \mathbb{N}$ un intero prefissato. Si divida il dominio $[0, \pi]$ in $m$ intervalli equispaziati e si introduca una discretizzazione agli elementi finiti del problema (1).

(f) Nel caso (a), la formulazione agli elementi finiti in (e) può essere accurata per ogni $q$? In caso contrario, come si puo' migliorare l'accuratezza della discretizzazione (tenendo costante $m$)?

(g) Nel caso (c) e assumendo $q > 0$, la discretizzazione agli elementi finiti introdotta in (e) può essere accurata per ogni $q$? In caso contrario, come miglioreresti l'accuratezza della discretizzazione (tenendo costante $m$)?

**13.** Si consideri il sistema lineare $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ un matrice definita positiva e $\mathbf{b} = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$. Inoltre, siano $\mathbb{H}$ e $\mathbb{S}$ definiti come

$$\mathbb{H} = \frac{\mathbb{A} + \mathbb{A}^T}{2}, \quad \mathbb{S} = \frac{\mathbb{A} - \mathbb{A}^T}{2}.$$

(a) Quali risultati teorici possono essere utilizzati per localizzare gli autovalori di $\mathbb{S}$ sul piano complesso? Come si può risolvere il sistema lineare $(\alpha\mathbb{I}+\mathbb{S})\mathbf{y}=\mathbf{s}$ per un prefissato $\alpha>0$ e per diversi vettori random $\mathbf{s}$?

(b) Quali metodi numerici possono essere utilizzati per stimare l'autovalore massimo e minimo di $\mathbb{H}$? Come si può risolvere il sistema lineare $(\alpha\mathbb{I}+\mathbb{H})\mathbf{z}=\mathbf{h}$ per un prefissato $\alpha>0$ e per diversi vettori random $\mathbf{h}$?

Sia $\alpha>0$ e si consideri il seguente metodo iterativo: dato un valore di primo tentativo $\mathbf{x}^{(0)}$ si calcoli

$$\begin{cases}(\alpha\mathbb{I}+\mathbb{H})\mathbf{x}^{(k+1/2)} & =(\alpha\mathbb{I}-\mathbb{S})\mathbf{x}^{(k)}+\mathbf{b},\\ (\alpha\mathbb{I}+\mathbb{S})\mathbf{x}^{(k+1)} & =(\alpha\mathbb{I}-\mathbb{H})\mathbf{x}^{(k+1/2)}+\mathbf{b}.\end{cases} \tag{2}$$

(a) Il metodo (2) è consistente per ogni $\alpha>0$?

(b) Per un prefissato $\alpha>0$, come si può controllare *a priori* se il metodo (2) convergente?

**14.** Si consideri la seguente regola di quadratura

$$Q(f)=w_1 f(x_1)$$

per il calcolo dell'integrale ponderato

$$W(f)=\int_0^1 x^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \alpha>0.$$

(a) Per ogni $\alpha>0$, si determinino $w_1$ e $x_1$ tali che la formula proposta sia esatta per $f(x)=1$ e $f(x)=x$.

(b) Si introduca la nozione di grado di esattezza della regola di quadratura per un integrale standard (non ponderato)

$$I(g)=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x,$$

and si osservi come $W(f(x))=I(x^\alpha f(x))$. Assumendo $\alpha\in\mathbb{N}$, facendo tendere $\alpha\to\infty$, è possibile utilizzare i risultati del punto (a) per ottenere una regola di quadratura per il calcolo di $I$ che sia caratterizzata da un grado di esattezza arbitrariamente grande? Si giustifichi la risposta e la si confronti con i risultati teorici.

(c) Per $\alpha=1/2$ e sotto l'assunzione $f\in\mathcal{C}^2([0,1])$, si fornisca una stima dell'errore di integrazione.

**15.** Considera la seguente equazione di trasporto-diffusione con $\mu>0$ e $\mathrm{div}(\boldsymbol{u})=0$ con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee e $\boldsymbol{s}\neq\mathbf{0}$ una generica funzione forzante

$$\dot{\boldsymbol{u}}-\mathrm{div}(\mu\nabla\boldsymbol{u})+\mathrm{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})=\boldsymbol{s}.$$

Scegli una sola tra le seguenti opzioni:

**Opzione 1**

(a) Scrivi l'equazione in forma integrale e facendo uso del teorema di Gauss riscrivila in termini di flussi attraverso la superficie di un volume di controllo. Partendo dalla formulazione integrale dell' equazione descrivi gli step necessari per la formulazione di una discretizzazione ad i volume finiti.

(b) Perch il termine convettivo $\mathrm{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})$ scritto in questa forma? E' sempre vero che $\mathrm{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}$?

(c) Descrivi come le propriet geometriche della mesh a volumi finiti influenzino l'accuratezza del metodo. Per un numero prefissato di celle, discuti l'algoritmo di generazione della mesh che riduca al massimo l'errore numerico. Se la mesh fosse generata con altri tipi di algoritmo come potresti aumentare l'accuratezza dei risultati?

**Opzione 2**

(a) Descrivi tutti gli step necessari per discretizzare l'equazione con un metodo agli elementi spettrali (suggerimento: parti dalla formulazione debole).

(b) E' sempre vero che $\mathrm{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}$?

(c) Quali sono i vantaggi e gli svantaggi di un metodo agli elementi spettrali rispetto ad un metodo standard agli elementi finiti?

## Meccanica

**16.** Dare la definizione di deformazione rigida e mostrare che $f$ una deformazione rigida se e solo se ammette la rappresentazione $f(p) = f(q) + \mathbf{R}(p - q)$, per ogni $p, q \in \mathcal{B}$, con $\mathbf{R}$ una rotazione e $\mathcal{B}$ un corpo.

**17.** Dimostrare che lo sforzo di Cauchy è un tensore simmetrico per un continuo soggetto a forze di volume e contatto.

**18.** Un corpo $\mathcal{B}$ con densità $\rho_0$ per unità di volume di riferimento (indeformato) sottoposto ad un moto $f(X, t)$, con $X \in \mathcal{B}$ un punto materiale e $t > 0$ il tempo, tale che $x_1 = e^t X_1 - e^{-t} X_2$, $x_2 = e^t X_1 + e^{-t} X_2$, $x_3 = X_3$ sono le coordinate cartesiane di un punto $x = f(X, t)$ nella configurazione deformata e $X_i$, $i = 1, 2, 3$ sono quelle del punto materiale corrispondente. Il tensore di sforzo di Cauchy associato a tale moto

$$\mathbf{T} = x_1^2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \alpha x_2 x_3^2 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + x_2^2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \beta x_1^3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3,$$

con $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ una base ortonormale in $\mathbb{R}^3$ e $\alpha > 0$, $\beta > 0$ costanti scalari. Trovare la forza di volume $\mathbf{b}$ e la forza di contatto $\mathbf{c}$ per unità di area tali che per il corpo $\mathcal{B}$ siano soddisfatti il bilancio del momento lineare e la conservazione della massa. Si assuma che la forza di contatto $\mathbf{c}$ per unit di area agisca in un punto $x$ del piano tangente ad una sfera di raggio $x - o$, dove $o$ l'origine di $\mathbb{R}^3$.

**19.** Si consideri una trave elastica di lunghezza $l$, rettilinea in assenza di carichi e con sezione trasversale circolare di raggio costante $r$. Si assuma la trave incernierata alle sue estremità e soggetta ad un carico termico costante di ampiezza $\delta T$. Si calcoli il carico termico $\delta T_b$ al quale corrisponde la perdita di stabilità della trave per buckling (il momento di inerzia di una sezione trasversale circolare di raggio $r$ è pari a $\pi r^4/4$).

**20.** Si consideri if flusso bidimensionale, non-stazionario di un fluido il cui campo di velocità è dato da $\mathbf{v}(x,y,t) = \sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{e}_1 + yt^2\mathbf{e}_2$, dove $\mathbf{e}_1$-$\mathbf{e}_2$ è una base ortonormale in $\mathbb{R}^2$, $t>0$ è il tempo e $x$, $y$ sono le variabili spaziali. Assegnato il campo di temperatura $T(x,y,t) = (4x-3)y + A\log(1+t)$, si determini la costante $A$ tale per cui il tasso istantaneo di variazione temporale della temperatura delle particelle di fluido che attraversano il punto $x=1$, $y=1$ al tempo $t=0$ sia pari a $\sqrt{2}$. Per il valore di $A$ appena trovato, si calcoli il tasso di variazione temporale del campo di temperatura nello stesso punto dello spazio e per lo stesso tempo.