SISSA – Area Matematica

Esame di ammissione per il corso di Analisi Matematica, Modelli e Applicazioni

27 marzo 2019

Il candidato risolva CINQUE dei seguenti problemi, e *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Analisi Matematica

1. Sia $P := \{f \in L^2((0,1)) : f \geq 0$ q.o. in $(0,1)\}$. Per ogni $f \in L^2((0,1))$ sia $f^+ \in L^2((0,1))$ la funzione definita da $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ per ogni $x \in (0,1)$. Si dimostri che

(a) per ogni $f \in L^2((0,1))$ la funzione f^+ è la proiezione di f sul convesso P;

(b) $\|f^+ - g^+\|_{L^2} \leq \|f - g\|_{L^2}$ per ogni $f,\ g \in L^2((0,1))$.

2. Per ogni funzione $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ sia $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ per ogni $x \in (0,1)$.

(a) Sia $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in (0,1)$. Supponiamo che $f(x_0) = 0$ e che f ed f^+ siano derivabili in x_0. Si dimostri che

$$(f^+)'(x_0) = f'(x_0) = 0\,.$$

(b) Usando il fatto ben noto che ogni funzione lipschitziana è derivabile quasi ovunque, si dimostri che, se $g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ è lipschitziana, allora $g'(x) = 0$ per quasi ogni $x \in g^{-1}(\{0\})$.

3. Sia $y \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione tale che

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(y(x) + x^2) & \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Si dimostri che

(a) $y \in C^\infty(\mathbb{R})$,

(b) $y'(0) = y''(0) = 0$ e $y'''(0) > 0$,

(c) $y(x) > 0$ per ogni $x \in (0, \sqrt{\pi})$ e $y(x) < 0$ per ogni $x \in (-\sqrt{\pi}, 0)$.

4. Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali e sia B lo spazio di Banach delle funzioni continue da $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ con la norma $\|f\| := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

(a) Si dimostri che per ogni $t \in [0,1]$ e per ogni funzione continua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ si ha

$$\limsup_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \inf_{\delta>0} \sup_{h\in(-\delta,\delta)\cap\mathbb{Q}} \frac{f(t+h)-f(t)}{h},$$

dove si $f(t+h)$ si intende uguale a $f(1)$ se $t+h>1$ e uguale a $f(0)$ se $t+h<0$.

(b) Si dimostri che l'insieme

$$A := \big\{(f,t) \in B \times [0,1] \ : \ f \text{ è differenziabile in } t\big\}$$

è un sottoinsieme Boreliano di $B \times [0,1]$.

5. Sia X uno spazio vettoriale di dimensione infinita.

(a) Si dimostri che, se X è uno spazio di Hilbert, allora esiste un $r>0$ tale per cui si possono trovare infinite palle di raggio r disgiunte interamente contenute nella palla unitaria di X.

(b) La stessa conclusione del punto precedente è valida se X è uno spazio di Banach?

6. Sia $p \in (1,+\infty)$ e si considerino gli spazi di Banach $L^p((0,1))$ e $L^p(\mathbb{R})$. È vero che questi due spazi sono isometricamente isomorfi (ovvero che c'è una bigezione lineare che preserva la norma)?

7. Si consideri il problema ai dati iniziali

$$\begin{cases} \partial_x u(x,y) + \partial_y u(x,y) = u(x,y)^2 & x\in\mathbb{R},\ y>0, \\ u(x,0) = v(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Per quali funzioni $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ esiste una soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$?

Suggerimento: si consideri l'evoluzione della soluzione lungo le semirette parallele a $x=y$.

8. Si dimostri che, se $C \subset L^p((0,1))$, $1<p<\infty$, è un insieme chiuso e convesso, allora per ogni data $f \in L^p((0,1))$ esiste un'unica $\bar g \in C$ tale che

$$\|f-\bar g\|_p = \min_{g\in C} \|f-g\|_p.$$

9. Siano $p_1, p_2 \in [1,\infty)$ e sia $\phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$|\phi(s)| \le c_1 + c_2 |s|^{p_1/p_2} \quad \text{per ogni } s \in \mathbb{R}.$$

Si dimostri che se $f_n \to f$ in $L^{p_1}((0,1))$, allora $\phi(f_n) \to \phi(f)$ in $L^{p_2}((0,1))$.

10. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T\colon H \to H$ un operatore lineare limitato tale che

$$(Tx, x) \geq \|x\|^2 \quad \text{per ogni } x \in H,$$

dove $(\cdot, \cdot)$ e $\|\cdot\|$ sono il prodotto scalare e la norma in H.

(a) Si dimostri che l'operatore inverso T^{-1} esiste ed è continuo e limitato.

(b) Sia $K\colon H \to H$ un operatore lineare compatto. Si dimostri che, se $T + K$ è iniettivo, allora è suriettivo.

Analisi Numerica

11. Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^2$, con bordo regolare $\partial\Omega$. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mu \nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + \sigma u = f & \text{in } \Omega \\ u = \overline{u} & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

dove $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{b}$ è un vettore costante in $\mathbb{R}^2$, μ è una costante reale positiva σ e sigma è una costante reale.

(a) Si derivi la formulazione debole di (1);

(b) Si discuta sotto quali assunzioni su $\mathbf{b}, \sigma$ e f la forma bilineare associata con la formulazione debole è coercitiva;

(c) Si scriva il generico elemento della matrice A_{ij} e del termine noto f_i di una discretizzazione agli elementi finiti del problema. La matrice A è simmetrica?

12. Sia K un triangolo in $\mathbb{R}^2$. Si denoti con A l'area di K e con m_1, m_2 and m_3 i punti medi dei lati di K. Sia $\mathcal{P}_n$ l'insieme dei polinomi di grado n definiti su K. Si dimostri che la seguente formula di quadratura è esatta per ogni polinomio $p \in \mathcal{P}_2$:

$$\int_K p(x)\, dx = \frac{1}{3} A \left(p(m_1) + p(m_2) + p(m_3) \right).$$

13. Sia $\Omega = (0, 1)$. Si consideri il seguente problema

$$\begin{cases} -\mu u'' + b u' = -b & \text{in } \Omega \\ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

in cui il coefficiente di diffusione $\mu > 0$ ed il coefficiente di trasporto b sono costanti.

(a) Sotto quali ipotesi su b e μ la soluzione sviluppa uno strato limite? In prossimità di quale parte del bordo del dominio si trova tale strato limite?

(b) Si trovi la soluzione analitica del problema.

(c) Si scriva la formulazione numerica del problema ottenuta usando uno schema alle differenze finite. Si discuta in quali condizioni la soluzione del problema discretizzato presenta problemi di stabilità, e si propongano possibili soluzioni numeriche.

14. Per ogni matrice 2×2 B sia $\|B\|$ la norma matriciale indotta dalla norma euclidea in $\mathbb{R}^2$:

$$\|B\| := \sup_{|v|=1} \frac{|Bv|}{|v|}.$$

Dato un triangolo arbitrario K, si definisca

$$h_K := \max_{x,y\in K} |x-y|$$
$$\rho_K := \max_{B_\rho \subset K} 2\rho,$$

dove $B_\rho \subset K$ è una palla di raggio ρ contenuta in K.

Siano $\hat{K}$ e K due triangoli in $\mathbb{R}^2$.

(a) Si mostri che esiste una trasformazione affinie invertibile T_K che mappa $\hat{K}$ in K;

(b) Indicando con $B := DT_K$ lo Jacobiano della transformazione T_K, si mostri che

$$\|B\| \le \frac{h_K}{\rho_{\hat{K}}}$$
$$\|B^{-1}\| \le \frac{h_{\hat{K}}}{\rho_K}.$$

15. Sia $A \in R^{m\times n}, m \ge n$, una matrice di rango massimo.

(a) Si mostri che la componente x della soluzione del sistema

$$M\begin{pmatrix} -r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M := \begin{pmatrix} I & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \in R^{(m+n)\times(m+n)}$$

minimizza $\|Ax-b\|_2$.

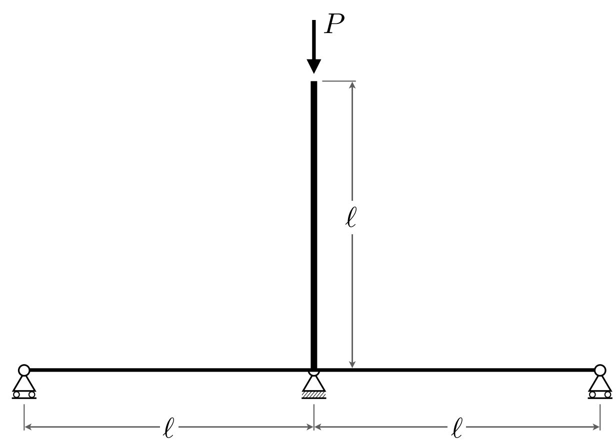
(b) Si esprima il numero di condizionamento di M in funzione dei valori singolari di A.

(c) Si scriva una espressione analitica di M^{-1} in funzione di A and A^T.

Meccanica dei Continui

16. Sia x il moto di un corpo continuo definito in componenti cartesiane da $x_1 = X_1 \exp(t^2), x_2 = X_2 \exp(t)$ e $x_3 = X_3 + kt$, dove $X_i\,,\ i = \{1, 2, 3\}$, sono le coordinate cartesiane di un punto materiale, t è il tempo e $k > 0$ è una costante. Si scelga k in modo che la linea di corrente, al tempo $t = 1$, che attraversa il punto (y_1, y_2, y_3) passi anche per il punto $(2y_1, \exp(\ln(2)/2)y_2, 2y_3)$, con $y_1 > 0, y_2 > 0$ e $y_3 > 0$.

17. Si determini il carico critico P_{c} del sistema elastico piano mostrato in figura. In particolare, si assuma l'asta verticale rigida e la trave elastica orizzontale di rigidezza flessionale B costante.



18. Si consideri un corpo cilindrico di altezza H_0 e base circolare di raggio R_0. Siano $\{\boldsymbol{E}_R, \boldsymbol{E}_\Theta, \boldsymbol{E}_Z\}$ e $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z\}$, rispettivamente, basi polari cilindriche nella configurazione di riferimento e nella configurazione corrente. Si determini il gradiente della deformazione e gli stretch principali corrispondenti alla deformazione di torsione semplice $r = R,\ \theta = \Theta + kZ$ e $z = Z$.

19. Una striscia elastica di lunghezza L e sezione trasversale rettangolare è soggetta alle sue estremità a trazioni normali di modulo σ in condizioni di deformazione piana. Si calcoli l'allungamento della striscia utilizzando la teoria dell'elasticità lineare nell'ipotesi di risposta costitutiva isotropa.

20. Sia $\mathcal{B}_t$ la configurazione corrente di un corpo continuo al tempo t e siano $\mathbf{F}$ e $\mathbf{v}$, rispettivamente, il gradiente di deformazione e la descrizione spaziale del campo di velocità associati al moto. Indicando con $\mathbf{n}(x, t)$ il campo della normale unitaria uscente alla frontiera $\partial\mathcal{B}_t$, mostrare che

$$\dot{\mathbf{n}} = [\mathbf{n} \cdot (\mathrm{grad}\,\mathbf{v})\mathbf{n}]\,\mathbf{n} - (\mathrm{grad}\,\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\mathbf{n}\,,$$

dove il punto sovraimposto denota la derivata materiale. Si ricordi che $\mathbf{n} = \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{m}/|\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{m}|$, con $\mathbf{m}$ la normale unitaria uscente alla frontiera della configurazione di riferimento del corpo.