Borse di studio per laurea specialistica

15 settembre 2005

Il candidato risolva al più cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1-5) ed uno nel gruppo B (esercizi 6-10).

Gruppo A

1. Sia $f : (0,1) \to \mathbf{R}$ una funzione tale che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty\,.$$

Dimostrare che f non è convessa.

2. Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Si supponga che ogni funzione continua $f : A \to \mathbf{R}$ risulti limitata. Dimostrare che A è compatto.

3. Si consideri la curva piana C espressa, in coordinate polari, dall'equazione

$$r = 1 + \cos\theta$$

(cardioide). Trovare i punti di massimo e di minimo (relativi ed assoluti) vincolati su C della funzione

$$f(x, y) = \max\{x, y\}\,.$$

4. Sia $P \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ una funzione tale che $P(x) > e^x$, $\forall x \geq 0$.
Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + P(x)y = e^x \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Provare che $y(x) < 1$ per ogni $x > 0$.

5. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^1 tale che

$$f'(x) < \frac{f(x)}{x} \qquad \forall x \in (0, +\infty).$$

(a) Dimostrare che la funzione $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ è decrescente.

(b) Dimostrare che $f'(y) < \dfrac{f(x)}{x}$ per ogni x, $y \in (0, +\infty)$ con $x \leq y$.

(c) Dimostrare che $f(x + y) < f(x) + f(y)$ per ogni x, $y \in (0, +\infty)$

Suggerimento: supponendo $x \leq y$, si stimi $\displaystyle\int_y^{x+y} f'(t)\,dt$ usando (a) e (b).

Gruppo B

6. Discutere qualitativamente la struttura delle orbite di un punto materiale in un campo gravitazionale di energia potenziale

$$U(x) = -\frac{1}{|x|} \qquad x \in \mathbf{R}^3 \,.$$

7. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate 2×2. Si consideri l'applicazione $b : V \times V \to \mathbf{R}$ data da $b(A, B) = tr(AB)$. Si dimostri che b è bilineare simmetrica e se ne calcoli la segnatura.

8. Sia G un gruppo ed H un suo sottogruppo. Si dice che H è caratteristico se per ogni automorfismo f di G si ha $f(H) = H$. Dimostrare che ogni sottogruppo caratteristico è normale. Dimostrare che il centro di ogni gruppo è caratteristico. Dare un esempio di un gruppo avente un sottogruppo normale non caratteristico.

9. Sia $\mathbf{R}^\omega$ il prodotto di una famiglia numerabile di copie di $\mathbf{R}$ (ovvero l'insieme delle successioni a valori reali). Dimostrare che $\mathbf{R}^\omega$, con la topologia prodotto, è uno spazio connesso (per archi). Dimostrare che $\mathbf{R}^\omega$, con la topologia box (che ha come base prodotti arbitrari di aperti in $\mathbf{R}$), non è connesso.

Suggerimento: si consideri il sottoinsieme delle successioni limitate.

10. Si consideri l'insieme X delle coniche passanti per i punti $(-1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ e $(1, -1)$ del piano euclideo. Si trovi una conica in X passante per $(2, 3)$ e se ne discuta l'unicità. Si dica se X contiene parabole e, se sì, quali. Si dica se l'insieme X contiene coniche tangenti alla retta di equazione $x = \sqrt{2}$ e, se sì, quali.