Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di Ammissione alle borse per la Laurea Magistrale in Matematica

Prova scritta del 18 settembre 2012

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1-5) ed uno nel gruppo B (esercizi 6-10). Il candidato *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Gruppo A

1. Si definiscano per $x > 0$ le funzioni

$$f_n(x) := \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}.$$

(a) Si dimostri che la funzione

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

è ben definita per $x > 0$. Si calcoli il suo valore in 1.

(b) Si studi la funzione $f(x)$ e si diano i comportamenti asintotici per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$.

(c) Si mostri che si ha l'equivalenza

$$f(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)n!},$$

dove $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ è il numero di Nepero.

2. Sia f una funzione positiva definita in $[1, 2]$ e continua in 1. Si mostri l'equivalenza:

$$x^{-n} f(x) \text{ converge uniformemente} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ limitata e } f(1) = 0.$$

3. Preso $t \in \mathbb{R}$ si considerino i tre punti di $\mathbb{R}^3$

$$A(t) = (t, t^3, t), B(t) = (t, t, t), C(t) = (0, 2t, t)$$

e sia $T(t)$ il triangolo aperto di vertici $A(t), B(t), C(t)$, nel piano da essi determinato, e si ponga $T(t) = \emptyset$ se i tre punti sono allineati. Sia S il solido dato da

$$S = \cup_{t \in [0,2]} T(t) \ ,$$

calcolarne il volume.

4. a) Dimostrare che se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabili su un insieme $A \subset \mathbb{R}$ di misura finita allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} dx = 0 \tag{1}$$

se e solo se $f_n \to 0$ in misura.

b) Fornire un esempio che mostra come l'ipotesi che A sia di misura finita non si può omettere per la validità di (1).

5. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = |t| \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = -1. \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Gruppo B

6. Siano x_i, y_i, z_i, $i = 1, 2, 3$, numeri reali tali che

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1, \quad i = 1,\, 2,\, 3.$$

Trovare il minimo ed il massimo del determinante

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

7. Si consideri la funzione di variabile reale x definita da

$$D(x) := \det\left(A + B\,x\right),$$

dove A e B sono due matrici $n \times n$.

(a) Dimostrare che $D(x)$ è un polinomio di grado al più n.

(b) Si calcoli $D(x)$ nel caso in cui le matrici siano

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & a & \dots & a \\ b & \lambda_2 & a & \dots & a \\ b & b & \lambda_3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

per $n \in \mathbb{N}$ dato e fissati $a \neq b$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reali.

8. Sia $f(z)$, $a \le z \le b$, una funzione differenziabile di classe $C^1([a,b])$ e positiva. Si consideri la superficie di rotazione ϕ ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva del piano xz, di equazione

$$x = f(z).$$

(a) Dimostrare che

$$S(\varphi) = 2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{1 + \left(\frac{df(z)}{dz}\right)^2}\, dz.$$

(b) Calcolare $S(\varphi)$ per le curve $x = z^3/3$ e $x = \cosh(z)$, $0 \leq z \leq b$.

(**Nota.** Sia $U \subset \mathbf{R}^2$ un insieme compatto, chiusura di un aperto connesso. Si ricordi che una superficie regolare in $\mathbf{R}^3$

$$\varphi : U \to \mathbf{R}^3$$

$$(u_1, u_2) \mapsto \varphi(u_1, u_2) = (\varphi_1(u_1, u_2), \varphi_2(u_1, u_2), \varphi_3(u_1, u_2))$$

ha area

$$S(\varphi) = \int_U \left|\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right|\right| \, du_1 du_2.$$

Nella formula precedente, $\times$ è il prodotto vettoriale.)

9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si verifichi se la matrice è diagonalizzabile o triangolarizzabile nei seguenti campi:

$$(a)\ \mathbb{R}, \quad (b)\ \mathbb{C}, \quad (c)\ \mathbb{Z}_2, \quad (d)\ \mathbb{Z}_3 \quad (e)\ \mathbb{Z}_{11}.$$

10. Si consideri l'insieme contenuto in $\mathbb{R}$

$$K := \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

e sia $\mathbb{R}_K$ l'insieme $\mathbb{R}$ con la topologia data dalla base di aperti

$$\Big\{(a, b), (a, b) \setminus K, a \leq b, a, b, \in \mathbb{R}\Big\}.$$

(a) Si mostri che la topologia di $\mathbb{R}_k$ è strettamente più fine della topologia standard su $\mathbb{R}$.

(b) Si mostri che $\mathbb{R}_K$ è connesso ma non connesso per archi.