Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di Ammissione alle borse per la Laurea Magistrale in Matematica

Prova scritta del 16 settembre 2013

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1-5) ed uno nel gruppo B (esercizi 6-10). Il candidato *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Gruppo A

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sia y_λ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_\lambda'(t) = y_\lambda(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y_\lambda(0) = \lambda, \end{cases}$$

la cui esistenza e unicità è supposta nota.

(i) Dimostrare che c'è al più una costante $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui il limite

$$\lim_{t\to+\infty} y_\lambda(t)$$

esiste ed è diverso da $\pm\infty$.

(ii) Dimostrare che, se esiste una costante $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui il limite

$$\lim_{t\to-\infty} y_\lambda(t)$$

esiste ed è diverso da $\pm\infty$, allora

$$\lim_{t\to-\infty} y_\mu(t) = \lim_{t\to-\infty} y_\lambda(t)$$

per ogni $\mu \in \mathbb{R}$.

2. Sia $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia $g\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) := f(x) - xf'(x)$.

(i) Dimostrare che f è convessa se e solo se g è non-crescente.

(ii) Dimostrare che, se f è convessa e

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty\,,$$

allora

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty\,.$$

3. (i) Sia μ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme misurabile secondo Lebesgue, con $\mu(E) > 0$. Provare che per ogni $p \in (0, \mu(E))$ esiste un insieme misurabile $E_p \subset E$ tale che $\mu(E_p) = p$.

(ii) Sia $f \geq 0$ una funzione integrabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}$, e si ponga per ogni $t \geq 0$:

$$\mu(t) = \mu(\{f > t\}) \ .$$

Provare che per ogni $s > 0$

$$\lim_{t \to s-} \mu(t) = \mu(\{f \geq s\}) \ ,$$

$$\lim_{t \to s+} \mu(t) = \mu(s) \ .$$

(iii) Sia $f \geq 0$ una funzione integrabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}$, provare che per ogni $c > 0$ esiste un insieme misurabile F di misura c tale che

$$\int_F f = \sup \left\{ \int_E f \mid E \text{ misurabile t.c. } \mu(E) = c \right\} \ .$$

4. Sia f una funzione continua su $[0, 1]$ e si definisca l'operatore T ponendo:

$$Tf(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \ , \text{ per ogni } x \in [0, 1] \ .$$

(i) Si provi che Tf è continua su $[0, 1]$.

(ii) Si provi che

$$T^2 f(x) = \int_0^x f(t) dt \ , \text{ per ogni } x \in [0, 1] \ .$$

5. Sia $B_1(0)$ la palla unitaria in $\mathbb{R}^3$. Sia $f \in C^1(\overline{B_1(0)})$ tale che $f = 0$ su $\partial B_1(0)$. Provare che

$$|f(0)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{B_1(0)} |\nabla f(x)| |x|^{-2} dx \ .$$

Gruppo B

6. Si consideri $S_k \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $z = x^2 + ky^2$, dove k è un parametro reale.

(i) Dimostrare che S_k è una superficie regolare e scrivere una sua parametrizzazione regolare;

(ii) classificare i punti di S_k per i vari valori del parametro k;

(iii) esistono valori di k per cui S_k è rigata? Esistono valori di k per cui è una rigata sviluppabile? In caso affermativo di quale tipo?

7. Sia S un sottanello di un anello R, entrambi commutativi con unità. Il conduttore C di S in R è l'insieme degli elementi $\alpha \in R$ tali che $\alpha R \subset S$.

(i) Dimostrare che C è un ideale di R ed è anche un ideale di S;

(ii) dimostrare che C è il più grande ideale di S che sia anche ideale di R;

(iii) determinare il conduttore nei seguenti due casi:

1. $R = \mathbb{C}[t]$, $S = \mathbb{C}[t^2, t^3]$;

2. $R = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, $S = \mathbb{C}[t]$.

8. Nel piano euclideo E^2, in cui è fissato un riferimento cartesiano,
(i) scrivere equazioni della riflessione ρ_r rispetto alla retta r di equazione $x - 2y = 0$;
(ii) data una generica retta parallela a r, determinare la sua immagine in ρ_r;
(iii) dato un punto P appartenente a r, sia σ la rotazione di centro P e angolo α. Detta τ l'applicazione composta $\sigma \circ \rho_r$, che cosa si può dire di τ?

9 (i) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$;
- per ogni $n \geq 3$, $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ è il gruppo banale.

Si giustifichino le risposte.
(ii) Si dimostri che $\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$, per ogni $n \geq 3$.
(Suggerimento: si usi (i).)
(iii) Si dimostri che per ogni $n \geq 2$ e per ogni $p \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ è connesso.
(iv) Per quali $n \in \mathbb{N}$ esiste un omeomorfismo $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$?

10. Un gruppo G di ordine $|G| = 14$ agisce su di un insieme M di 7 elementi in modo tale che l'azione non possiede punti fissi ($m \in M$ è un punto fisso se $g \cdot m = m$, $\forall g \in G$).
(i) Si dimostri che tale azione è transitiva.
(ii) Si dimostri che G è isomorfo ad $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ oppure al gruppo diedrale D_7.