Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di Ammissione alle borse per la Laurea Magistrale in Matematica

Prova scritta del 4 settembre 2014

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1-5) ed uno nel gruppo B (esercizi 6-10). Il candidato indichi chiaramente sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non piú di cinque).

Gruppo A

1. Sia $(,)$ il prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^n$ e ω_n l'area della sfera unitaria.

a) Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ una matrice reale e $Tr(A)$ la sua traccia. Dimostrare che

$$\int_{|x|<1} (Ax, x)\, dx = \frac{\omega_n}{n(n+2)} Tr(A).$$

b) Dimostrare che se $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |D_{ij}u|^2 dx.$$

2. Sia u una funzione armonica su $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che

a) per ogni $p \geq 1$ la funzione $v := |u|^p$ è subarmonica nel senso della media. i.e. per ogni $R > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$|u(x)|^p \leq \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} |u(y)|^p\, dy.$$

b) $w = |\nabla u|^2$ è subarmonica in senso classico, cioè

$$\Delta w \geq 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n.$$

3. Sia $h : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua, limitata, strettamente decrescente con $h(1) = 0$. Sia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione positiva di classe C^1 con derivata g' limitata. Si consideri la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = h(t)g(x) \\ x(1) = 2. \end{cases}$$

Dimostrare che:

a) la soluzione $x(t)$ è definita per tutti i tempi $t \in (0, +\infty)$,

b) esistono entrambi i limiti $\lim_{t\to 0^+} x(t)$ e $\lim_{t\to+\infty} x(t)$,

c) il limite $\lim_{t\to 0^+} x(t)$ è finito ed $\lim_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$.

4. Sia $I = (-1, 1)$ e sia $\theta : I \to [0, +\infty)$ una funzione di classe $C^\infty(I)$ con le seguenti proprietà:

- $\theta(x) = 0$ se e solo se $x = 0$,
- $\theta''(0) > 0$.

a) Dimostrare che θ si può scrivere come $\theta = \delta^2$ in I, dove $\delta \in C^1(I)$ ha le seguenti proprietà:

  - $\delta(0) = 0$, $\delta'(0) > 0$,
  - $\delta(x) < 0$ per ogni $x \in I$ con $x < 0$, e $\delta(x) > 0$ per ogni $x \in I$ con $x > 0$.

b) Trovare l'espressione esplicita di δ in termini di θ.

5. Sia data la superficie $\Gamma \subset \mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)} \times \mathbb{R}_z$ nella forma

$$\Gamma = \left\{ (x_1, x_2, z) : x_2 = \frac{1}{2}\left(z^3 - 3x_1 z\right) \right\} .$$

a) Scrivere in forma parametrica, in un intorno dell'origine, l'insieme S dei punti di Γ dove il piano tangente a Γ contiene la direzione e_3 (cioè la direzione z). Tale insieme risulta una varietà liscia di dimensione uno?

b) Descrivere e disegnare l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$ ottenuto come proiezione ortogonale di S sul piano $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$.

c) Descrivere e disegnare l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2_{(x_1,z)}$ ottenuto come proiezione ortogonale di S sul piano $\mathbb{R}^2_{(x_1,z)}$.

Gruppo B

6. Si consideri il problema

$$\begin{cases} \ddot{x} + (1 + c^2)x - 2c^2x^3 = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

dove $c \in [0, 1]$ è un parametro reale. Dimostrare che per ogni $c \in [0, 1)$ la soluzione $x_c(t)$ è una funzione periodica.

7. Per un numero primo p, sia $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$, $\bar{a} \neq \bar{0}$.

a) Dimostrare che l'applicazione

$$\phi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p, \quad \phi(\bar{x}) = \bar{a}\bar{x}$$

è iniettiva.

b) Concludere che ogni elemento $\bar{a} \neq \bar{0}$ in $\mathbb{Z}_p$ ha un elemento inverso rispetto al prodotto.

c) Per un numero naturale n arbitrario, quali elementi $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ hanno un inverso rispetto al prodotto? (giustificare la risposta).

8. Per ogni $a \in \mathbb{C}$, dimostrare l'esistenza di una radice $\bar{z}$ dell'equazione

$$a\, z^2 - z + 1 = 0$$

che soddisfa la condizione

$$|\bar{z} - 1| \leq 1.$$

9.

a) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita e W un sottospazio di V tale che $f(W) \subset W$. Se f è triangolarizzabile, dimostrare che anche la sua restrizione $f|W : W \to W$ è triangolarizzabile.

b) Siano $f, g : V \to V$ automorfismi unitari di uno spazio unitario V di dimensione finita che commutano. Dimostrare che esiste una base ortonormale di V che consiste di autovettori comuni di f e di g.

10. Dimostrare che

a) uno spazio metrico con un sottoinsieme numerabile denso ha una base numerabile,

b) uno spazio metrico compatto X ha una base numerabile.