Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di Ammissione alle borse per la Laurea Magistrale in Matematica

Prova scritta, 3 settembre 2015

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1-5) ed uno nel gruppo B (esercizi 6-10). Il candidato indichi chiaramente sulla prima pagina dell' elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Gruppo A

1.

(a) Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile con derivata $f'(x)$ uniformemente continua su $(0, +\infty)$. Provare che se esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ finito allora $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(b) Dire se la conclusione precedente continua a valere assumendo solo che f è di classe $C^1((0, +\infty), \mathbb{R})$.

2.

(a) Enunciare il teorema dei residui per funzioni meromorfe.

(b) Per $x \in \mathbb{R}$ calcolare i residui di $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, definita da

$$f(z) = e^{-\mathrm{i}xz} g(z) \quad \text{dove} \quad g(z) = \frac{1}{(4+z^2)(16+z^2)}.$$

(c) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare, per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\mathrm{i}xz}}{(4+z^2)(16+z^2)} dz.$$

3. Si consideri per $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} n\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\Big) \log\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

(a) Si determini l'insieme degli $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ dove la serie converge.

(b) Dire se la serie converge uniformemente in $(1, \infty)$.

4. Si consider il cerchio $\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e la mappa $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ data da $f(x) = x + \alpha$ $(mod\ 1)$ per un qualche $\alpha \in (0, 1)$. Per $n \in \mathbb{N}$, sia

$$f^n(x) = f \circ \cdots \circ f(x) = x + n\alpha \ (mod\ 1)$$

la composizione di f con se stessa n volte. Per ogni $x \in \mathbb{S}^1$ definiamo l'orbita di x come l'insieme

$$\mathcal{O}(x) := \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

(a) Si dimostri che dati $x, y \in \mathbb{S}^1$ si ha

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y) \quad \text{oppure} \quad \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) = \emptyset.$$

(b) Si dimostri che $\alpha = p/q \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f^q(x) = x \ \forall x \in \mathbb{S}^1$.

(c) Si dimostri che $\alpha \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ la cardinalità di $O(x)$ è infinita, $\forall x \in \mathbb{S}^1$.

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una mappa di classe C^1. Un punto p tale che $f(p) = p$ si dice un *punto fisso*.

(a) Si dimostri che se p è un punto fisso e $|f'(p)| < 1$ allora p è *localmente attrattivo*: esiste un intorno $\mathcal{U}$ di p tale che

$$f^n(x) := f \circ \cdots \circ f(x) \to p$$

quando $n \to \infty$ per ogni $x \in \mathcal{U}$;

(b) Si dimostri che se p è un punto fisso e e $|f'(p)| > 1$ allora p è *localmente repulsivo*: esiste un intorno $\mathcal{U}$ di p nel quale f è localmente invertibile e tale che

$$f^{-n}(x) := f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}(x) \to p$$

quando $n \to \infty$ per ogni $x \in \mathcal{U}$;

(c) Si mostri attraverso esempi (basta disegnare il grafico) che punti fissi con $f'(p) = 1$ possono essere sia localmente attrattivi che localmente repulsivi.

Gruppo B

6.

(a) Dato un campo K, sia $K[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in K in una indeterminata x. Si provi che, se $p \in K[x]$ è irriducibile, allora l'anello quoziente $\frac{K[x]}{(p)}$ è un campo.

(b) Sia ora $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'anello degli interi modulo 7.

(i) Si provi che $p = x^3 - 2$ e $q = x^3 + 2$ sono irriducibili in $K[x]$.

(ii) Si dimostri che $\frac{K[x]}{(p)}$ e $\frac{K[x]}{(q)}$ sono isomorfi.

7. Per ogni intero $n \in \mathbb{N}$, sia $\mathbb{R}^n$ lo spazio euclideo n-dimensionale con la topologia standard.

(a) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme con la topologia indotta da $\mathbb{R}^n$, $a_0 \in A$, Y uno spazio topologico, $y_0 \in Y$. Sia $h\colon (A, a_0) \to (Y, y_0)$ una funzione continua di spazi topologici puntati.
Si provi che, se esiste una funzione continua $H\colon \mathbb{R}^n \to Y$ con $H_{|A} = h$, allora $h_*\colon \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ è il morfismo banale, dove $\pi_1(X, x_0)$ denota il gruppo fondamentale dello spazio topologico X con punto base $x_0 \in X$.

(b) Con riferimento al punto (a), si dica se è sufficiente che h_* sia il morfismo banale affinché esista una estensione continua H di h. Si motivi la risposta.

(c) Sia $n = 2$ e si identifichi $\mathbb{R}^2$ con il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ nel modo standard, $(x, y) = x + \mathrm{i}y$. Siano $A = Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z|^2 = 1\}$, $a_0 = y_0 = 1$, ed

$$h(z) = z^2 .$$

Si dica, motivando la risposta, se esiste una funzione continua $H\colon \mathbb{C} \to S^1$ che estende h come al punto (a).

8. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dz} - y + \frac{1}{z} = 0, \qquad z > 0.$$

(a) Si *costruisca* una soluzione particolare delle forma

$$y_p(z) = e^z \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

e si scriva la soluzione generale dell'equazione.

(b) Si dimostri che esiste finito il limite

$$\lim_{z \to 0+} e^{-z} y_p(z) + \ln z .$$

(c) Si dimostri che

$$\lim_{z \to +\infty} y_p(z) = 0 .$$

9.

(a) In dipendenza dai valori di $k \geq 0$ e $\alpha \geq 0$, si discuta qualitativamente il moto nel piano di un punto materiale di massa $m > 0$ in un campo di forze $F = -\nabla V$ di energia potenziale

$$V(|x|) = k|x|^\alpha, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Si scriva esplictamente la funzione del tempo $r = r(t)$ nel caso particolare in cui $\alpha = 2$, $k > 0$ e il momento angolare è nullo. Qui r è la coordinata radiale $r := |x|$.

10. Si consideri le seguenti quadriche nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x, y, z):

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x^2 + 4xy - y^2 - 2yz - 1 = 0\}\,; \\ \mathcal{Q}_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 2 = 0\}\,. \end{aligned}$$

(a) Si dica se $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ sono affinemente equivalenti.

(b) Si determini i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ tali che il piano di equazione

$$x - k = 0$$

è tangente a $\mathcal{Q}_2$.

(c) Si determini la forma normale affine di $\mathcal{Q}_2$.