Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di Ammissione alle borse per la Laurea Magistrale in Matematica

Prova scritta del 6 Settembre 2018

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1-5) ed uno nel gruppo B (esercizi 6-10). ll candidato *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Gruppo A

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione C^1 e periodica (cioè tale per cui esista un $T > 0$ tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). Si consideri l'insieme:

$$P = \{T > 0 \text{ tale che } f(x+T) = f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Si dimostri la seguente implicazione (s) : "se f non è constante, allora $\inf P > 0$."

(b) Assumendo che la f sia solo continua, rimane la (s) vera? Lo si provi o si dia un controesempio.

(c) Assumendo solo che la f sia continua in un punto, rimane la (s) vera? Lo si provi o si dia un controesempio.

(d) Rimuovendo l'ipotesi di continuità della f, rimane la (s) vera? Lo si provi o si dia un controesempio.

2. Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ con la topologia Euclidea. Si dimostri che X è compatto se e solo se ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ è limitata.

3. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di numeri reali definita da:

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{1}{n(n+1)}.$$

Si determini l'espressione del generico elemento x_n della successione.

4. Sia $(A, \mathcal{B}, \mu)$ uno spazio di misura con misura finita e sia $f : A \to \mathbb{R}_+$una funzione misurabile. Sia $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$\lambda(t) = \mu\left(\left\{x \in A \,|\, f(x) > \frac{1}{t}\right\}\right).$$

Si dimostri che:

$$\int_A f d\mu = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda(t)}{t^2} dt.$$

(Traccia: si consideri la funzione $K : A \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definita da $K(x,t) = \frac{1}{t^2}\chi_{\{f(x)>\frac{1}{t}\}}(x)$.)

5. Sia $f : (0, +\infty) \to (-1, 0)$ una funzione tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Si dimostri che f non può essere convessa.

Gruppo B

6. Sia A una matrice $n \times n$ con entrate complesse e con $n \geq 2$.

(a) Si dimostri che se A è *nilpotente* (cioè $A^r = 0$ per qualche $r \in \mathbb{N}$), allora ogni autovalore di A è nullo. Si determini quindi il polinomio caratteristico di A.

(b) Più in generale si determini per quali valori $c \in \mathbb{C}$ una matrice A tale per cui $A^r = cI_n$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ (I_n denota la matrice identità).

7. Nel piano affine reale $\mathbb{A}^2$ con coordinate $(O; x, y)$ si consideri l'ellisse:

$$\Gamma : \, x^2 + 4y^2 = 4.$$

Siano A e B i punti di intersezione di Γ con l'asse delle x e sia P il punto di intersezione di Γ con l'asse y avente ordinata positiva.

(a) Si determino le coordinate dei punti A, B e P e la retta t tangente a Γ in P;

(b) si scriva l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di coniche tangenti a Γ in P e passanti per A e per B;

(c) si trovino le coniche riducibili di $\mathcal{F}$.

(d) Sia $\mathcal{G}$ il fascio di coniche che sono simultaneamente tangenti a Γ in A e in P. *Senza scrivere l'equazione per* $\mathcal{G}$, si determinino le coniche comuni a $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. In generale, quante coniche sono comuni a due fasci di coniche?

8. Sia $\mathbb{Z}_3[X]$ l'anello dei polinomi nell'indeterminata X e con coefficienti in $\mathbb{Z}_3 := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; si consideri l'anello quoziente $A := \mathbb{Z}_3[X]/(X^2 + \overline{2})$.

(a) Determinare il numero di elementi di A;

(b) dimostrare che A non è un dominio;

(c) trovare l'insieme $ZD(A)$ dei divisori di zero in A. *(traccia: si consideri anche il punto (d))*

(d) Per ciascun elemento non nullo di $A \backslash ZD(A)$ si determini il suo inverso.

9. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ la retta reale con la topologia Eucludea $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ e sia $\mathcal{C} = \{A \subseteq \mathbb{R} \,|\, \mathbb{R} \backslash A \text{ è compatto}\}$. Si consideri la "compattificazione a n punti" di X, cioè lo spazio topologico $X_n = \mathbb{R} \cup \{\infty_1, \ldots, \infty_n\}$ munito della topologia $\mathcal{T}$ definita da:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} \{A \cup \{\infty_k\} \,|\, A \in \mathcal{C}\} \right).$$

(a) Si dimostri che X_n è compatto e, per $n \geq 2$, non-Hausdorff.

(b) Si calcoli il gruppo fondamentale di X_n.

10. Un punto materiale è vincolato a muoversi senza attrito lungo la curva C di equazione

$$y = c \cosh \frac{x}{c}, \quad c > 0$$

soggetto, come unica forza attiva, alla forza peso costante, diretta lungo l'asse y discendente. All'istante $t = 0$ il punto è fermo nella posizione $x = c$.

a) Scrivere l'ascissa curvilinea lungo C come funzione della variabile x.

b) Scrivere l'equazione del moto del punto in termini dell'ascissa curvilinea come funzione del tempo.

c) Determinare un integrale primo del moto (quantità conservata).

d) Calcolare dopo quanto tempo il punto si ferma.