Sector of Functional Analysis

Entrance Examination, 1990

Il candidato risolva al più cinque dei seguenti quesiti.

Pb. 1) Sia $\Omega = (0, \pi) \times (-1, 1)$. Calcolare esplicitamente la soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ del problema

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{per ogni } (x, y) \in \Omega$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \qquad \text{per ogni } y \in [-1, 1]$$

$$u(x, -1) = u(x, 1) = \sin(2x) \qquad \text{per ogni } x \in [0, \pi].$$

Pb. 2) Dimostrare che la famiglia

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \{\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} | n \geq 1\}, \{\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} | n \geq 1\}$$

è una base ortonormale dello spazio $L^2([-\pi, \pi])$.

Pb. 3) Sia $I = [a, b]$ un intervallo compatto, e sia $h : I \to I\!R$ una mappa continua. Indichiamo con X l'insieme di tutte le funzioni continue $f : I \to I\!R$ tali che

$$||f||_h = \sup_{x \in I} e^{\int_a^x h(t)dt} |f(x)| < +\infty.$$

Dimostrare che $|| \cdot ||_h$ definisce su X una norma che è equivalente alla usuale norma del "sup" su X.

Pb. 4) Sia $(x_n)_n$ una successione di di numeri reali tale che $x_n \to 0$. Definiamo sullo spazio $\ell^2 = \{(u_n)_n | u_n \in I\!R, \sum_n u_n^2 < +\infty\}$ un operatore lineare T che ad ogni successione $u = (u_n)_n \in \ell^2$ associa la successione Tu data da:

$$(Tu)_n = x_n u_n.$$

Dimostrare che:
- T è continuo;
- T è compatto e calcolare lo spettro dell'operatore T.

Pb. 5) Sia $(A_n)_n$ una successione di operatori lineari e continui tra due spazi di Banach X e Y. Supponiamo che per ogni $x \in X$ la successione $(A_n x)_n$ abbia un limite debole in Y che chiameremo Ax. È vero che l'operatore $A : X \to Y$ così definito è lineare e continuo?

Pb. 6) Dimostrare che se E è uno spazio di Banach e $H \subset E$ è un iperpiano, allora H è chiuso, o è denso in E. (*Suggerimento: Supponiamo che* $0 \in H$. *Se* H *non è chiuso, allora è un sottospazio proprio della sua chiusura.*)

Pb. 7) Sia $\Omega \subset I\!R^{n+1}$ un insieme aperto, $f : \Omega \to I\!R^n$ una funzione continua, e sia $K \subset \Omega$ un compatto. Dimostrare che esiste un $\delta = \delta(K) > 0$ tale che per ogni $(t_0, x_0) \in K$ il problema di Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

ha una (unica) soluzione definita (almeno) su $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Pb. 8) Sia X uno spazio metrico e sia $(K_n)_n$ una successione di sottoinsiemi chiusi di X tale che

$$\ldots \subset K_{n+1} \subset K_n \subset K_{n-1} \subset \ldots$$

Provare le seguenti affermazioni:

a) Se X è completo e $\lim_n diam K_n = 0$, allora $\bigcap_n K_n$ non è vuoto e consiste esattamente di un punto.

b) Se uno degli K_n è compatto allora $\bigcap_n K_n$ non è vuoto.

Pb. 9) Siano $I = [0, 1]$, C un sottoinsieme chiuso di $I\!R$ e sia

$$X_C = \{f \in L^2(I) | f(x) \in C \text{ per q.o. } x \in I\}.$$

a) Provare che X_C è chiuso nella topologia forte di $L^2(I)$.

b) Provare che, se C è un intervallo chiuso, allora X_C è chiuso nella topologia debole di $L^2(I)$.

c) Mostrare con un esempio, che in generale X_C non è chiuso nella topologia debole di $L^2(I)$.

Pb. 10) Sia $f : [0, 1] \to I\!R$ una funzione misurabile. Provare che $f \in L^\infty([0, 1]; I\!R)$ se e solo se $f \in L^p([0, 1]; I\!R)$ per ogni $p \geq 1$ e $\sup_{p \geq 1} ||f||_p$ è finito.