Settore di Analisi Funzionale e Applicazioni

Esame d'entrata, 1992

Risolvere al più 5 dei seguenti problemi.

Pb. 1) Sia $f : I\!R \to I\!R$. Si definisca

$$\omega(x) := \inf_{\epsilon>0} \sup_{\substack{|y-x|<\epsilon \\ |z-x|<\epsilon}} |f(y) - f(z)|.$$

Si dimostri che

1a) ω è semicontinua superiormente;

1b) L'insieme dei punti di continuità di f è intersezione numerabile di insiemi aperti (cioè, G_δ).

Pb. 2) Sia (z_n) una successione di numeri complessi, con $\mathrm{Re}(z_n) \geq 0$ per ogni n. Mostrare che le convergenze delle serie $\sum z_n$ e $\sum z_n^2$, implicano la convergenza della serie $\sum |z_n|^2$.

Pb. 3) Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni misurabili da $I\!R$ in $I\!R$. Si dimostri che l'insieme

$$\{x \in I\!R \mid (f_n(x))_n \ \text{ converge}\}$$

è misurabile.

Pb. 4) Sia L_1 il sottospazio lineare di ℓ_2 generato dai vettori $(1, 2, 0, 0, \ldots)$, $(0, 1, 2, 0, \ldots)$, $(0, 0, 1, 2, 0, \ldots), \ldots$, e sia L_2 il sottospazio lineare di ℓ_2 generato dal vettore $(1, 0, 0, \ldots)$. Dimostrare che $L_1 + L_2$ è denso in ℓ_2.

Pb. 5) Trovare il massimo dominio di esistenza per la soluzione di ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$y' = \sin y^2, \quad y(0) = 1,$$

$$y' = y + \sin y^2, \quad y(0) = 1,$$

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Pb. 6) Siano $u, v \in C^1([0, 1])$ e $\omega \in C^0([0, 1] \times I\!R)$. Mostrare che le condizioni

$$v(0) < u(0) \qquad \text{e} \qquad v'(t) < \omega(t, v(t)), \qquad u'(t) = \omega(t, u(t)) \quad \forall\ t \in [0, 1]$$

implicano $v(t) < u(t) \quad \forall t \in [0, 1]$.

Pb. 7) Trovare una soluzione u di

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

su $\Omega = [0, \pi] \times I\!R$ che soddisfi

$$u(x, 0) = \sin x \quad \text{per } 0 \le x \le \pi,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \sin 2x \quad \text{per } 0 \le x \le \pi,$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{per } t \in I\!R.$$

Pb. 8) Sia $(f_n)_n$ una successione in L^1 con $f_n \ge 0$ per ogni n. Si assuma che $(f_n)_n$ converga puntualmente ad una funzione $f \in L^1$. Dimostrare che $\int f_n \to \int f$ implica $f_n \to f$ in L^1.

(Suggerimento: considerare le funzioni $\min\{f_n, f\}$ e $\max\{f_n - f, 0\}$.)

Pb. 9) Siano $a_0, \dots, a_n \in C^1(I\!R)$. Per ogni $x \in I\!R$ si consideri il polinomio

$$P_x(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) z^k$$

nella variabile reale z. Si assuma che per ogni x l'equazione $P_x(z) = 0$ ammetta n distinte radici reali $z_1(x) < z_2(x) < \dots < z_n(x)$. Mostrare che $z_1, z_2, \dots, z_n$ sono funzioni di classe C^1 da $I\!R$ in $I\!R$.

Pb. 10) Sia H uno spazio di Hilbert separabile con base $(e_n)_n$. Sia $T : H \to H$ un operatore lineare limitato tale che

$$\sum_n ||Te_n||^2 < \infty.$$

Provare che T è un operatore compatto.

Pb. 11) Siano X uno spazio di Banach e A, B sottospazi chiusi di X con $A \cap B = \{0\}$ e $A + B = X$. È ben noto che ogni $x \in X$ si può scrivere in modo unico come $x = P_A x + P_B x$, con $P_A x \in A$ e $P_B x \in B$. Provare che le proiezioni $P_A : X \to A$ e $P_B : X \to B$ sono continue.