Settore di Analisi Funzionale e Applicazioni

Esame d'ammissione, ottobre 1993

Si risolvano al più 5 dei seguenti problemi.

Pb. 1) Siano $x_1, \dots x_n$ numeri reali. Dimostrare che
1a) $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad (x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2)^{1/n} \le 1/n$;
e dedurre
1b) $x_i > 0$ per ogni $i \quad \Longrightarrow \quad (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \le \frac{x_1 + \cdots x_n}{n}$.

Pb. 2) Siano $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funzioni olomorfe. Dimostrare che la condizione

$$|f(z)| \le |g(z)| \qquad (z \in \mathbb{C}), \qquad\qquad (*)$$

implica l'esistenza di una costante c tale che, $f = cg$.

Pb. 3) Sia H uno spazio di Hilbert, e per ogni $n \ge 1$ sia $A_n : H \to H$ un operatore lineare limitato. Dimostrare che $\|A_n\| \to 0$ se vale la seguente condizione:
$A_n x_n \to 0$ fortemente per ogni sucessione debolmente convergente $(x_n)_{n \ge 1}$ in H.

Pb. 4) Sia $(f_n)_{n \ge 1}$ una sucessione di funzioni continue a valori reali definite su $[0, 1]$. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:
a) $(f_n)_{n \ge 1}$ è uniformemente limitata e $f_n \to 0$ puntualmente;
b) $\lim_n \int_{[0,1]} f_n d\mu = 0$ per ogni misura boreliana μ positiva e limitata su $[0, 1]$.

Pb. 5) Sia X uno spazio metrico completo e, per ogni $0 \le \lambda \le 1$, $T_\lambda : X \to X$ soddisfi

$$d(T_\lambda(x), T_\lambda(y)) \le \frac{1}{2} d(x, y) \qquad (\forall\ x, y, \lambda).$$

Dimostrare che se D è un sottoinsieme denso di X e se per ogni $x \in D$

$$\lim_{\lambda \to 0} T_\lambda(x) = T_0(x),$$

allora

$$\lim_{\lambda \to 0} x_\lambda = x_0,$$

dove $x_\lambda = T_\lambda(x_\lambda)$.

Pb. 6) In $L^\infty = L^\infty([0, 1])$, sia V l'insieme di tutte le funzioni caratteristiche χ_E, con E sottoinsieme misurabile di $[0, 1]$. V è compatto in L^∞? Giustificare la risposta.

Pb. 7) Sia $T : \ell_2 \to \ell_2$ l'operatore lineare definito da

$$T(x) := (\frac{x_n}{n})_{n\geq 1},$$

per ogni $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2$. Dimostrare che $T(\ell_2)$ è denso in ℓ_2 e diverso da ℓ_2 (cioè, $\overline{T(\ell_2)} = \ell_2$ e $T(\ell_2) \neq \ell_2$).

Pb. 8) Siano $f, f_n : [0,1] \to I\!R$ funzioni continue. Si assuma che per ogni sucessione $(x_n)_{n\geq 1}$ convergente a $x \in [0,1]$, si abbia

$$\lim_n f_n(x_n) = f(x).$$

Dimostrare che f_n converge uniformemente a f in $[0,1]$.

Pb. 9) Sia $f : I\!R \to]0,+\infty[$ una funzione continua. Dimostrare l'unicità della soluzione per il problema di Cauchy

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0,$$

per ogni dato iniziale t_0, x_0.

Pb. 10) Sia $f : [0,1] \times I\!R^n \to I\!R^n$ una funzione di classe C^1. Sia x la soluzione del problema di Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = 0,$$

su $[0,\beta[\subset [0,1]$. Dimostrare che se x non può essere estesa a β, allora per ogni sottoinsieme compatto $K \subset I\!R^n$ esiste $t_K < \beta$ tale che $x(t) \notin K$ per $t_K < t < \beta$.