S.I.S.S.A.
Settore di analisi funzionale e applicazioni

Esame di ammissione – 7 ottobre 1998

Risolvere al piú cinque dei seguenti problemi.

1. Sia $f: \mathbf{R} \to [0,1]$ una funzione continua e non decrescente, e sia

$$A := \{x \in \mathbf{R} : \text{ esiste } y > x \text{ tale che } f(y) - f(x) > y - x\}.$$

(a) Dimostrare che, se $]a,b[$ è un intervallo aperto e limitato contenuto in A e $a, b \notin A$, allora $f(b) - f(a) = b - a$.
(b) Dimostrare che A non contiene semirette.
(c) Dimostrare che la misura di Lebesgue di A è minore o uguale a uno.

2. Siano $a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$. Per ogni $x \in]a,b]$ sia $P(x)$ l'insieme di tutte le famiglie finite $(x_i) = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ tali che $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = x$ (l'intero k dipende dalla famiglia (x_i)). Sia $u : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione tale che

$$g(x) := \sup_{(x_i) \in P(x)} \sum_{i=1}^{k} |u(x_i) - u(x_{i-1})|^2 < +\infty$$

per ogni $x \in]a,b]$.
(a) Dimostrare che, per ogni $x \in]a,b]$, il limite

$$\lim_{y \to x-} u(y)$$

esiste ed è finito.
(b) Dimostrare che l'insieme dei punti di $[a,b]$ in cui u è discontinua è al piú numerabile.
(c) Dimostrare che

$$\limsup_{y \to x} \frac{|u(y) - u(x)|^2}{|y - x|} < +\infty$$

per quasi ogni $x \in [a,b]$.

3. Sia $r : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua e sia u_λ l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda r(t) u(t) = 0, \quad \text{per } t \in [0,1], \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \end{cases}$$

È ben noto che (u_{λ_n}) converge uniformemente a u_λ su $[0,1]$ quando $\lambda_n \to \lambda$. Definiamo la funzione $\tau : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ponendo

$$\tau(\lambda) := \inf\{t \in \,]0,1] : u_\lambda(t) = 0\},$$

con la convenzione $\tau(\lambda) = 1$ se $u_\lambda(t) \neq 0$ per ogni $t \in \,]0,1]$. Dimostrare che τ è continua.

4. Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^N$, sia $(u_n)_{n\geq 1}$ una successione in $L^1(\Omega)$, e sia $u \in L^1(\Omega)$. Supponiamo che (u_n) converga a u debolmente in $L^1(\Omega)$ e che $|u_n| \leq |u|$ quasi ovunque in Ω. Dimostrare che (u_n) converge fortemente a u in $L^1(\Omega)$.

5. Sia X uno spazio di Hilbert infinitodimensionale separabile con norma $\|\cdot\|$, e sia $(e_n)_{n\geq 1}$ un sistema ortonormale completo in X. Per ogni $n \geq 1$, sia X_n il sottospazio lineare generato da $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e sia $Y_n = X_n^\perp$ il complemento ortogonale di X_n. Sia $A : X \to X$ un operatore lineare continuo. Dimostrare che A è compatto se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{x\in Y_n \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = 0.$$

6. Sia l^2 lo spazio di Banach delle successioni reali $x = (x_n)_{n\geq 1}$ tali che

$$\|x\|_{l^2}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty.$$

Sia $A : l^2 \to l^2$ l'operatore lineare continuo cosí definito: per ogni $x \in l^2$, sia $Ax = y$, dove $y = (y_n)_{n\geq 1}$ con

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ y_n = \dfrac{x_{n-1}}{n-1}, \qquad n > 1. \end{cases}$$

Dimostrare che A è compatto e determinare lo spettro di A.

7. Sia $\mathcal{E}$ l'insieme delle funzioni $u \in C^1([0,2])$ tali che $u(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,2]$ e $|u'(x) + u(x)^2| < 1$ per ogni $x \in [0,2]$. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{F} := \left\{ u|_{[1,2]} : u \in \mathcal{E} \right\}$ è un sottoinsieme equicontinuo di $C^0([1,2])$.

8. Sia l^1 lo spazio di Banach delle successioni reali $x = (x_n)_{n\geq 1}$ tali che

$$\|x\|_{l^1} := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty.$$

Sia $(a_n)_{n\geq 1}$ una successione di numeri reali con $a_n > 0$ per ogni n. Sia X lo spazio lineare normato di tutte le successioni $x \in l^1$ tali che

$$\|x\|_X := \sup_{n\geq 1} \frac{|x_n|}{a_n} < +\infty.$$

(a) Dimostrare che l'immersione di $(X, \|\cdot\|_X)$ in $(l^1, \|\cdot\|_{l^1})$ è continua se e solo se

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

(b) Dimostrare che, se vale $(*)$, allora l'immersione di $(X, \|\cdot\|_X)$ in $(l^1, \|\cdot\|_{l^1})$ è compatta.

9. Sia Ω un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbf{R}^N$, sia $p > 1$, e sia $(u_n)_{n\geq 1}$ una successione in $L^p(\Omega)$. Supponiamo che (u_n) converga a zero puntualmente quasi ovunque in Ω e che esista una costante $M \in \mathbf{R}$ tale che $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq M$ per ogni $n \geq 1$. Dimostrare che (u_n) converge a zero in $L^r(\Omega)$ per ogni $r \in [1, p[$.

10. Sia $u_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ la successione di funzioni cosí definita:

$$u_n(x) := \operatorname{sign}(\sin(2^n \pi x)), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Dimostrare che $(u_n)_{n\geq 0}$ è un sistema ortonormale in $L^2([0,1])$.
(b) Dire se $(u_n)_{n\geq 0}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2([0,1])$ e giustificare la risposta.