Prova scritta dell'esame di ammissione in Analisi Funzionale 1999

Es.1 Trovare tutti i numeri reali a tali che tutte le soluzioni del sistema $\ddot{x} = -\nabla U(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, siano periodiche nei casi in cui

- (i) $U(x) = x_1^2 + ax_2^2$;
- (ii) $U(x) = x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_2$.

Es.2 Si determini il minimo numero intero $n \geq 1$ per cui esiste un'equazione differenziale $x^{(n)} = F(t, x, \ldots, x^{(n-1)})$ di ordine n, con $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ continuamente differenziabile in tutti gli argomenti, avente come soluzioni $x(t) = t$ e $x(t) = \sin t$.

Es.3 Sia c_0 lo spazio delle successioni reali infinitesime. Per $p > 0$ e $x \in c_0$ si ponga $x^p = (x_i^p) \in c_0$. Dato $\xi \in c_0$, $\xi_i > 0$ $\forall i$, si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^p & (t > 0) \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

dove $\frac{dx}{dt} = (\frac{dx_i}{dt})$. Discutere, al variare di $p > 0$, esistenza e non esistenza di soluzioni di (1) e se ne determini l'intervallo massimale di esistenza.

Es.4 Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un insieme compatto, convesso, con interno non vuoto. Per ogni vettore unitario $v \in \mathbb{R}^2$, sia $b = b(v)$ l'unica costante tale che la retta di equazione $v \cdot x = b$ divide K in due parti di eguale misura

$$K^+ = \{x \in K \mid v \cdot x \geq b\} \qquad K^- = \{x \in K \mid v \cdot x \leq b\}.$$

- (i) Si dimostri che la mappa $v \to b(v)$ è ben definita, continua e dispari: $b(-v) = -b(v)$.
- (ii) Data una funzione continua $\phi : K \to \mathbb{R}$ dimostrare che esiste una retta che divide K in sottoinsiemi K^-, K^+ tali che

$$\text{mis } K^+ = \text{mis } K^- \qquad \text{e} \qquad \int_{K^-} \phi(x)dx = \int_{K^+} \phi(x)dx.$$

Suggerimento: Si consideri la mappa

$$v \to \int_{\{v \cdot x \geq b\}} \phi(x)dx - \int_{\{v \cdot x \leq b\}} \phi(x)dx.$$

Es.5 Dimostrare che esiste un'unica funzione continua $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ tale che

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(x + \phi(y))dy \qquad x \in [0, 1].$$

Es.6 Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata e sia $TV_0^1(f)$ la sua variazione totale su $[0, 1]$. Dimostrare che

$$\int_0^{1-h} |f(x + h) - f(x)| \, dx \leq h \, TV_0^1(f)$$

per ogni $h \in (0, 1)$.

Es.7 Sia (f_n) una successione limitata in $L^2(0,1)$ e sia $f \in L^2(0,1)$. Siano $F_n, F : [0,1] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt \qquad F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Dimostrare che

- (i) se (f_n) converge ad f debolmente in $L^2(0,1)$, allora (F_n) converge ad F uniformemente su $[0,1]$;
- (ii) se (F_n) converge ad F debolmente in $L^2(0,1)$, allora (f_n) converge ad f debolmente in $L^2(0,1)$.

Es.8 Sia $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continua e soddisfacente alle due condizioni:

- $||f(t,x) - f(t,y)|| \leq h(t)||x-y||$ con $\int_0^{+\infty} h(s)ds < +\infty$;
- $\exists x_0 \in \mathbb{R}^N$ tale che $\int_0^{+\infty} ||f(s,x_0)||ds < +\infty$.

Dimostrare che

- (i) ogni soluzione di $x' = f(t,x)$ è limitata;
- (ii) ogni soluzione di $x' = f(t,x)$ ha limite finito per $t \to +\infty$.

Es.9 Sia $\mathcal{H} = l^2(\mathbf{C})$ e

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{ a = (a_n)_{n\geq 0}, a_n \in \mathbf{C}, \exists N_a \in \mathbb{N} \ : \ \sum_{n=0}^{N_a} a_n = 0 \ e \ a_n = 0 \text{ se } n > N_a \Big\}.$$

Sia $A : \mathcal{D}(A) \to l^2(\mathbf{C})$ definito da

$$(Aa)_n = i\Big(a_n + 2\sum_{m=0}^{n-1} a_m\Big) = i\Big(\sum_{m=0}^{n-1} a_m - \sum_{m=n+1}^{N} a_m\Big).$$

Dimostrare che

- A è densamente definito e simmetrico;
- A non è autoaggiunto.

Suggerimento: Un operatore simmetrico A é autoaggiunto se e solo se $A - iI$ è surgettivo.

Es.10 Si consideri la Lagrangiana $\mathcal{L}(u,u') = e^{u'} + u^2$. Dimostrare che non esistono soluzioni della corrispondente equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial u'}\mathcal{L}(u,u') = \frac{\partial}{\partial u}\mathcal{L}(u,u')$$

soddisfacenti $u(0) = 1$ e $u(1) = 0$.