S.I.S.S.A. - Settore di Analisi Funzionale e Applicazioni

Esame di ammissione - 12 ottobre 2000

Il candidato risolva al più cinque dei seguenti esercizi.

1. Dimostrare che le successioni di funzioni

$$f_n(x) = \sin(n^2 x^2) \qquad \text{e} \qquad g_n(x) = \sin(\sqrt{nx})$$

convergono a zero debolmente in $L^2([0,1])$.

2. Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione convessa di classe C^1. Supponiamo che esista il limite

$$L := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\,,$$

e che sia $0 < L < +\infty$.

(a) Dimostrare che $0 < \liminf_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{x} \leq \limsup_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{x} < +\infty$.

(b) Dimostrare che esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{x}$, e calcolarlo.

(Suggerimento: usare la diseguaglianza $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$).

3. Sia (f_n) una successione limitata in $L^\infty([0,2\pi],\mathbf{C})$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $k \in \mathbf{Z}$ sia $a_k(f_n)$ il coefficiente di Fourier definito da

$$a_k(f_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f_n(x)\, e^{-ikx}\, dx\,.$$

Supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} a_k(f_n) = 0$ per ogni $k \in \mathbf{Z}$.

(a) Dimostrare che (f_n) converge a zero debolmente in $L^p([0,2\pi],\mathbf{C})$ per ogni $p \in [1,+\infty[$.

(b) Trovare un esempio di successione (f_n) che soddisfi tutte le ipotesi e non converga a zero fortemente in $L^1([0,2\pi],\mathbf{C})$.

4. Sia $K \in C([0,2])$ positiva, decrescente e tale che $K(0) = 1$. Provare che per ogni $h \in C([0,1])$ esiste un'unica soluzione $u \in C([0,1])$ dell'equazione

$$u(x) = h(x) + \int_0^1 K(x+y)\, u(y)\, dy \qquad \forall x \in [0,1]\,.$$

5. Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$ e sia $u \in C^2(\Omega)$ una funzione tale che $|Du(x)| = 1$ per ogni $x \in \Omega$, dove Du è il gradiente di u e $|\cdot|$ è la norma euclidea. Dimostrare che ogni soluzione x del sistema $x'(t) = Du(x(t))$ è una funzione affine. (Suggerimento: scrivere l'equazione per $x''(t)$).

6. Sia $Q\colon C^\infty(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ una funzione lineare. Supponiamo che $Q(f) \geq 0$ per ogni $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, con $f(0) = 0$, tale che l'insieme $\{x \in \mathbf{R} : f(x) \geq 0\}$ sia un intorno di 0. Dimostrare che esistono tre costanti a, b, c in $\mathbf{R}$ tali che

$$Q(f) = a\, f''(0) + b\, f'(0) + c\, f(0) \qquad \forall f \in C^\infty(\mathbf{R})\,.$$

(Suggerimento: si consideri che, se vale la formula da dimostrare, deve essere $a = Q(g)$, $b = Q(h)$ e $c = Q(1)$, dove $g(x) = x^2/2$ e $h(x) = x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$).

7. Dato $b > 0$, trovare la costante $a \in \mathbf{R}$ tale che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + a\, x'(t) + b\, x(t) = 0 \quad \text{per } t \in \mathbf{R}, \\ x(0) = 1\,, \\ x'(0) = 0\,, \end{cases}$$

tenda a zero il più rapidamente possibile per $t \to +\infty$.

8. Sia α l'estremo superiore dell'insieme dei numeri $T > 0$ tali che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = [x(t)]^2 + t^2\,, \\ x(0) = 1\,, \end{cases}$$

ha una soluzione definita in $[0, T]$. Provare che $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq 1$.

9. Sia X uno spazio di Banach separabile con duale X^*, sia $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ e sia $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione densa in B. Posto $B^* = \{T \in X^* : \|T\|_{X^*} \leq 1\}$, sia $d\colon B^* \times B^* \to \mathbf{R}$ la metrica così definita:

$$d(S,T) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}|S(x_n) - T(x_n)| \ , \quad S,T \in B^* \ .$$

Dimostrare che:

(a) $d(T_n, T) \to 0$ se e solo se $T_n \to T$ puntualmente in B;

(b) (B^*, d) è uno spazio metrico compatto.

10. Sia K un compatto di $\mathbf{R}^N$ e sia $f_n\colon K \to \mathbf{R}$ una successione di funzioni continue che converge puntualmente in K ad una funzione continua $f\colon K \to \mathbf{R}$. Supponiamo che esista una costante $k \geq 0$ tale che

$$|f_m(x) - f(x)| \leq k|f_n(x) - f(x)| + \frac{1}{n}$$

per ogni $x \in K$ e per ogni $m, n \in \mathbf{N}$ con $m \geq n$. Dimostrare che $f_n \to f$ uniformemente su K.