S.I.S.S.A.

Settore di Analisi Funzionale e Applicazioni

Esame di ammissione - 11 Ottobre 2001

Il candidato risolva al più cinque dei seguenti problemi.

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + q(t)y = 0,$$

dove q è una funzione continua e $q(t) \leq 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Dimostrare che ogni soluzione y non costante che soddisfa $y(0) = 0$ è strettamente monotona.

2. Sia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente convessa non negativa di classe C^2 tale che $F(0,0) = 0$.

(a) Dimostrare che l'equazione $F(x, y) = F(0, 1)$ definisce implicitamente una funzione $y = \phi(x)$ di classe C^2 per x appartenente a un intorno dello zero tale che $\phi(0) = 1$;

(b) Dimostrare che $\phi''(0) \leq 0$.

Nota: F strettamente convessa significa che

$$F(\lambda P + (1 - \lambda)Q) < \lambda F(P) + (1 - \lambda)F(Q)$$

per ogni $\lambda \in]0, 1[$ e per ogni $P, Q \in \mathbf{R}^2$ $P \neq Q$.

3. Siano $f, g, h : [0, 1] \to \mathbf{R}$ funzioni integrabili non negative. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) $(f(x))^2 \leq g(x)h(x)$ per q.o. $x \in [0, 1]$;

(b) $(\int_E f(x)dx)^2 \leq \int_E g(x)dx \int_E h(x)dx$ per ogni insieme misurabile $E \subseteq [0, 1]$.

4. Data $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, si definisca, per $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}).$$

Dimostrare che per ogni $f \in C^1([0,1])$ esistono due costanti $a_0 = a_0(f)$ e $a_1 = a_1(f)$ tali che

$$\sigma_n(f) = a_0 + \frac{\sigma_n(f')}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = a_0 + \frac{a_1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Trovare una formula esplicita per a_0 e a_1 in termini di f.

5. Siano $a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$. Si supponga che esista una soluzione y dell'equazione differenziale

$$y'' + e^t y = 0$$

tale che $y(a) = y(b) = 0$ e $y(t) < 0$ per ogni $t \in]a, b[$. Dimostrare che

$$\inf_{a<t<b} \frac{y(t)}{(t-a)(t-b)} > 0.$$

6. Siano $f, g \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ e si supponga che $g(x+1) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right).$$

7. Sia $1 \le p < \infty$.

(a) Sia $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione misurabile tale che fg appartiene a $L^p([0,1])$ per ogni $f \in L^p([0,1])$. Dimostrare che g appartiene a $L^\infty([0,1])$.

(b) Per ogni $a \in L^\infty([0,1])$ si consideri l'operatore lineare continuo $T_a : L^p([0,1]) \to L^p([0,1])$ definito da $T_a(f) = af$. Sia $T : L^p([0,1]) \to L^p([0,1])$ un operatore lineare e continuo tale che $TT_a = T_aT$ per ogni $a \in L^\infty([0,1])$. Dimostrare che esiste $h \in L^\infty([0,1])$ tale che $T = T_h$.

8. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \le 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbf{R}^2, \quad f(t,0) = 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = x. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che, per ogni $x \in \mathbf{R}$, la soluzione y_x del problema di Cauchy è ben definita su tutta la semiretta $[0, +\infty[$.

(b) Dimostrare che l'insieme $\{y_x(\cdot), x \in [0, 1]\}$ è compatto in $C([0, +\infty[)$.

9. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \ (y > 0).$$

(a) Dimostrare che ogni soluzione non costante è strettamente monotona.

(b) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \\ y(0) = u \\ y'(0) = v. \end{cases}$$

Trovare l'insieme dei punti $(u, v) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ tali che la soluzione massimale del problema di Cauchy è non costante e definita su tutta la retta reale $\mathbf{R}$. Per tali punti (u, v) calcolare i limiti della soluzione per $t \to \pm\infty$.

10. Per ogni $r > 0$ si consideri la funzione $f^r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f^r(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2}, & \text{per } |x| \le r, \\ 0, & \text{per } |x| > r. \end{cases}$$

(a) Trovare tutti i $p \ge 1$ tali che la funzione $r \to f^r$ da $]0, +\infty[$ a $L^p(\mathbf{R})$ è continua.

(b) Trovare tutti i $p \ge 1$ tali che la funzione $r \to f^r$ ds $]0, +\infty[$ a $L^p(\mathbf{R})$ è differenziabile.