S.I.S.S.A.
Settore di Analisi Funzionale e Applicazioni

Esame di ammissione per i curricula di Analisi Matematica e Matematica Applicata
15 ottobre 2002

Il candidato risolva al più cinque dei seguenti problemi.

1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile con $\mu(E) < +\infty$. Dato $p \in [1, +\infty[$ sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $L^p(E)$ limitata tale che $f_n(x) \to f(x)$ per quasi ogni $x \in E$.
(i) Provare che $f \in L^p(E)$.
(ii) Se $1 < p < +\infty$, provare che $f_n \to f$ in $L^q(E)$ per ogni $q \in [1, p[$.

(*Suggerimento*: Per *(ii)* si rammenti che $f_n \to f$ in misura.)

2. Siano $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e D un sistema fondamentale in $\mathcal{H}$. Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{H}$ limitata tale che

$$(u_n, e) \to (u, e), \quad \forall e \in D.$$

Provare che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente.

3. Provare che esistono una costante $c \in \mathbb{R}$ e una funzione periodica $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (non identicamente nulla) tale che $u(x, t) = U(x - ct)$ risolve la seguente equazione differenziale

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + u^3 = 0.$$

4. Sia $A(t) = (a_{ij}(t))$ una matrice reale simmetrica $N \times N$ a coefficienti continui a_{ij}. Si supponga che tutti gli autovalori di $A(t)$ siano minori di -1 per ogni $t \in \mathbb{R}$. Definita u la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^N,$$

dimostrare che $\lim_{t\to+\infty} |u(t)|^2 = 0$.

5. Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ con $f > 0$ quasi ovunque. Si definisca $F : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ ponendo

$$F(x) := \int_{B(x,1)} f(y)dy.$$

Dimostrare che:
(i) F è continua;
(ii) $F(x) \to 0$ per $|x| \to +\infty$;
(iii) F ha almeno un punto di massimo assoluto ma non ha minimo su $\mathbb{R}^N$.

6. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tale che $|f(y) - f(x)| \geqslant |y - x|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

(i) Provare che $f(\mathbb{R}^N)$ è chiuso.

(ii) Provare che la matrice Jacobiana $Df(x)$ è invertibile $\forall x \in \mathbb{R}^N$ e dedurne che $f(\mathbb{R}^N)$ è aperto.

(iii) Provare che $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è iniettiva e suriettiva.

7. Sia $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0, y > 0\}$. Dimostrare che ogni soluzione $u \in C^1(A, \mathbb{R})$ dell'equazione differenziale

$$x\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial y}$$

è della forma $u(x, y) = \varphi(xy)$. Dire se ciò continua a valere per $A = \mathbb{R}^2$.

8. Sia $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$. Provare che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{x} \varphi(x) dx = \pi\varphi(0).$$

9. Trovare tutte le soluzioni del seguente problema di Cauchy:

$$\frac{dx}{dt} = \sin(t)x^{1/3}, \quad x(0) = 0.$$

10. Provare che la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = t - x^2, \quad x(1) = 1$$

è definita in $[1, +\infty)$, si ha $\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$ ed inoltre $\lim_{t \to +\infty} x(t) - t^{1/2} = 0$.