**S.I.S.S.A.**
**Settore di Analisi Funzionale e Applicazioni**

*Esame di ammissione – 17 aprile 2002*

Il candidato risolva al più cinque dei seguenti problemi.

**1.** Sia $f \in C(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tale che $|f(t,y)| < 1$ per ogni $(t,y) \in \mathbf{R}^2$. Si consideri la soluzione $y$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Provare che $|y(t)| < 1$ per ogni $t \geq 0$.
(*Suggerimento:* Utilizzare il metodo di variazioni delle costanti.)

**2.** Sia $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tale che $f'(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$.
*(i)* Provare che l' immagine $f(\mathbf{R})$ è un intervallo aperto (possibilmente illimitato).
*(ii)* Assumendo che

$$f'(t) \geq \frac{1}{1 + f(t)^2}, \qquad \text{per ogni } \; t \in \mathbf{R}$$

provare che $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

**3.** Dato $E \subseteq [0,1]$ sia $\chi_E$ la funzione indicatrice di $E$, definita da

$$\chi_E(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in E, \\ 0 & \text{se } t \notin E. \end{cases}$$

Siano $(E_n)_{n \geq 0}$ una successione di sottoinsiemi misurabili di $[0,1]$ ed $E$ un sottoinsieme misurabile di $[0,1]$ tali che $\chi_{E_n} \rightharpoonup \chi_E$ debolmente in $L^2([0,1])$.

Provare che $\chi_{E_n} \to \chi_E$ fortemente in $L^2([0,1])$.

**4.** Per ogni $f \in C([0,1], \mathbf{R})$ si ponga

$$Tf(x) = \int_0^1 [\min\{x, y\} \cdot f(y)] dy.$$

Provare che $T$ è un operatore compatto da $C([0,1], \mathbf{R})$ in sè e determinarne lo spettro.

**5.** Sia $(X, \Sigma, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : X \to \mathbf{R}^+$ una funzione misurabile tale che

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) > t\}\right) > \frac{1}{t}.$$

Provare che $f$ non è integrabile.

**6.** Sia $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di reali positivi tale che $a_n \to +\infty$ quando $n \to \infty$. Si consideri lo spazio di Hilbert

$$l_a^2 = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \quad \text{successione in } \mathbf{C} \text{ tale che } \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n |u_n|^2 < +\infty \right\}.$$

dotato del prodotto scalare

$$(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \overline{v}_n$$

Provare che la palla chiusa in $l_a^2$ è un sottonsieme compatto dello spazio

$$l^2 = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \quad \text{successione in } \mathbf{C} \text{ tale che } \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty \right\},$$

dotato del prodotto scalare usuale.

**7.** Sia $K = \{x : [0, T] \to \mathbf{R} \text{ tale che } x'(t) = x^2(t) \text{ e } 0 \leq x(T) \leq 1\}$.
Provare che $K$ è un sottoinsieme compatto di $C([0, 1], \mathbf{R})$.

**8.** Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ una funzione con derivate prime e seconde globalmente limitate e tale che $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
Provare che esiste $C > 0$ tale che $|f(x, y)| \leq C|xy|$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

**9.** Sia $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Si consideri una soluzione $y$ non identicamente nulla dell'equazione

$$y''(t) = f(y(t)), \qquad t \in [0, 1].$$

Provare che $y$ ha al più un numero finito di zeri.

**10.** Si consideri il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x' = -x^2 - xy + x \\ y' = -y^2 - xy + y, \end{cases}$$

con condizioni iniziali $x(0) = x_0 > 0$ e $y(0) = y_0 > 0$.
Provare che la soluzione $(x(t), y(t))$ è definita per ogni $t \geq 0$ e che $x(t) > 0$ e $y(t) > 0$ per ogni $t \geq 0$.