S.I.S.S.A.
Settore di Analisi Funzionale e Applicazioni

Esame di ammissione per i curricula di Analisi Matematica e Matematica Applicata

9 ottobre 2003

Il candidato risolva al più cinque dei seguenti problemi.

1. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ continua. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$x''(t) = f(x(t))x(t),$$

dove $x(\cdot)$ ha valori in $\mathbf{R}^3$. Provare che la traiettoria di ogni soluzione $x(\cdot)$ è contenuta nel sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $x(0)$ e $x'(0)$.

2. Dato $a \in \mathbf{R}$, si consideri il sistema 2×2 di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + ay(t) \\ y'(t) = ay(t). \end{cases}$$

Dire per quali valori di a esiste una soluzione $(x(\cdot), y(\cdot))$ non identicamente nulla tale che $(x(t), y(t)) \to (0,0)$ per $t \to +\infty$.

3. In questo problema si considera nota la completezza in $L^2((-\pi,\pi))$ del sistema di funzioni $\{\cos(kx) : k = 0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\sin(kx) : k = 1, 2, \ldots\}$.
(a) Provare che il sottospazio chiuso di $L^2((0,\pi))$ generato da $\{\sin(kx) : k = 1, 2, \ldots\}$ coincide con $L^2(0,\pi))$.
(b) Provare che il sottospazio chiuso di $L^2((-\pi,\pi))$ generato da $\{1\} \cup \{\sin(kx) : k = 1, 2, \ldots\}$ non coincide con $L^2((-\pi,\pi))$.

4. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ una funzione tale che $|f(x) - \cos x| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Provare che tutte le soluzioni dell'equazione $x'(t) = f(x(t))$ sono limitate.

5. Dire se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt[3]{(x(t)-1)^2} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

ha una unica soluzione definita su tutto $\mathbf{R}$, e giustificare la risposta.

6. Siano

$$B^0 = \{u \in C^0([0,1]) : \|u\|_{C^0} \leq 1\};$$

$$B^1 = \{u \in C^1([0,1]) : \|u\|_{C^1} \leq 1\}.$$

Rispondere alla seguenti domande e giustificare le risposte.

(a) B^0 è un sottoinsieme chiuso di $L^1([0,1])$?

(b) B^0 ha interno vuoto in $L^1([0,1])$?

(c) B^1 è un sottoinsieme relativamente compatto di $L^1([0,1])$?

7. Siano $f, g : [0,1] \to \mathbf{R}$ funzioni misurabili e si definiscano gli insiemi $E_k = \{x \in [0,1] : |f(x)| \leq k\}$ per $k = 1, 2, \ldots$ Supponendo $fg \in L^1([0,1])$ provare che

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

8. Provare che, per ogni $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2n}|x|^{\frac{1}{n}-1}\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

9. Si ponga

$$(Tf)(x) = \int_0^1 \frac{f(tx)}{\sqrt{1-t^2}}dt, \qquad x \in [0,1].$$

Provare che T è un operatore lineare e continuo dallo spazio $C([0,1])$ in sè e calcolarne la norma.

10. Provare che non esiste alcuna funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ di classe C^1 iniettiva.