S.I.S.S.A.
Settore di Analisi Funzionale e Applicazioni

Esame di ammissione - 13 ottobre 2004

Il candidato risolva al più cinque dei seguenti problemi.
(Si prega di elencare gli esercizi prescelti nella prima pagina della bella copia)

1) Sia (f_n) una successione limitata in $L^2([0,1])$ e sia $f \in L^2([0,1])$. Si considerino le seguenti funzioni definite su $[0,1]$:

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt, \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Dimostrare che:

a) per ogni n la funzione F_n è hölderiana di esponente $1/2$;

b) se $f_n \rightharpoonup f$ debolmente in $L^2([0,1])$, allora $F_n \to F$ uniformemente;

c) se $F_n \to F$ puntualmente, allora $f_n \rightharpoonup f$ debolmente in $L^2([0,1])$.

2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞, periodica di periodo 2π. Dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una costante $C_k > 0$ tale che

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\,dx \right| \leq \frac{C_k}{n^k} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

3) Sia U un insieme aperto di $\mathbb{R}^N$. Sia (f_n) una successione di funzioni in $C^\infty(U)$. Si supponga che per ogni $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esiste una costante $C_k > 0$ tale che

$$\sup_{x \in U} |D^k f_n(x)| \leq C_k \quad \text{per ogni } n.$$

Dimostrare che esiste $f \in C^\infty(U)$ e una sottosuccessione (f_{n_j}) tali che per ogni insieme compatto $K \subset U$ e per ogni $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si ha

$$D^k f_{n_j} \to D^k f \quad \text{uniformemente in } K.$$

4) Dimostrare che non esiste alcuna funzione analitica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

5) Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 con le seguenti proprietà:

- $x \mapsto f(t,x)$ è strettamente crescente per ogni t;
- $f(t+1,x) = f(t,x)$ per ogni t, x.

Dimostrare che l'equazione

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

ammette al più una soluzione periodica di periodo 1.

6) Dimostrare che ogni successione monotona limitata in $L^2([0,1])$ converge fortemente.

7) Per ogni $\alpha \in [0,1]$ si consideri il seguente sistema 2×2 di equazioni differenziali del primo ordine nella funzione incognita $(x(t), y(t))$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1-\alpha) \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \right).$$

a) Per ogni $\alpha \in [0,1]$ determinare se l'origine è stabile, asintoticamente stabile oppure instabile.

b) Dimostrare che per ogni $\alpha \in [0,1]$ l'origine non è globalmente asintoticamente stabile.

8) Sia $f \in L^2([-1,1])$. Per ognuna delle seguenti proprietà stabilire se implica o meno che $f = 0$ quasi ovunque, giustificando la risposta:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^n f(x)\, dx = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{2n} f(x)\, dx = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

9) Provare che, per $\alpha \in [0,1]$, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) + x(t) - \sin(\alpha x(t)) = 0,$$

sono periodiche.

10) Trovare tutte le soluzioni del seguente sistema e il loro dominio di definizione:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2\sqrt{x(t)}, & t \geq 0, \\ \dot{y}(t) = x(t)(y(t)+1)^2, & t \geq 0, \\ x(0) = 0, \ y(0) = 0. \end{cases}$$