S.I.S.S.A.
Settore di Analisi Funzionale e Applicazioni

Esame di ammissione - 6 ottobre 2005

Il candidato risolva al più cinque dei seguenti esercizi

(1) Si consideri l'equazione differenziale ordinaria in coordinate polari

$$\dot{r} = \begin{cases} 0 & r = 0 \\ \sqrt{r}\sin(1/r) & r \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\dot{\theta} = f(r), \tag{2}$$

con $f \in C^1$ e $0 < \alpha \leq f \leq \beta$.

(a) Studiare la Lipschitzianità locale e globale del secondo membro della (1), (2).

(b) Per dati iniziali $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, $r_0 \in [0, +\infty)$, studiare l'esistenza e unicità locale e globale della soluzione.

(2) Si consideri l'equazione differenziale in $\mathbb{R}$

$$\dot{x} = x - e^{-t^2}.$$

Dire se esistono soluzioni $x(t)$ tali che $x(t) \to 0$ per $t \to \pm\infty$. In caso affermativo determinare quante.

(3) Si consideri il problema di Cauchy

$$\dot{x} = x^2(\alpha + \sin(x)), \quad x(0) = 1.$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ dare una stima del massimo intervallo di definizione della soluzione.

(4) Si consideri il sistema lineare di equazioni differenziali a derivate parziali sul toro $\mathbb{T}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \sin(y) - \cos(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

- Si trovi la soluzione esplicita, assumendo che

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x,y)dxdy = 0.$$

- Si mostri che se f è regolare, periodica e a media nulla, la soluzione del seguente sistema su $\mathbb{T}^2$
$$\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = f(x,y)$$
soddisfa
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(u(x,y)u'(x,y) + v(x,y)v'(x,y)\Big)dxdy = 0.$$

(5) Nello spazio $L^\infty((0,1),\mathbb{R})$ si consideri l'insieme
$$B = \{u \in L^\infty((0,1),\mathbb{R}) : 0 \le u(x) \le 1 \text{ quasi ovunque}\}.$$
Sia E il sottoinsieme di $L^\infty((0,1),\mathbb{R})$ formato dalle funzioni caratteristiche di unioni di intervalli aperti di $(0,1)$ con estremi razionali. Dimostrare che la chiusura dell'inviluppo convesso di E nella topologia debole* coincide con B.

(6) Si consideri la funzione $f : S^1 \to S^1$ definita da
$$f(x) = (3x + 2\sin x)\,/_{2\pi\mathbb{Z}}, \qquad x \in S^1.$$
Si dimostri che per ogni insieme aperto (non vuoto) $\mathcal{A} \subseteq S^1$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ volte}}(\mathcal{A}) = S^1$.

(7) Sia $\mathcal{S} = \{(v_1, v_2, v_3) \in (0,+\infty)^3 \ : \ v_1v_2v_3 = 1\}$. Dato un parametro positivo τ, si consideri la funzione $f_\tau : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f_\tau(v_1,v_2,v_3) = \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 3\right) - \tau\,(v_1 + v_2 + v_3)\,.$$
Trovare il numero dei punti critici di f_τ al variare di τ in $(0,+\infty)$. Essi rappresentano configurazioni di equilibrio per un cubo di gomma neo-hookeana incomprimibile sotto l'azione di trazioni idrostatiche.

(8) Si consideri l'operatore lineare $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ dato dalla formula
$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)\,dy \quad \forall f \in L^2([0,1]).$$

(a) Provare che l'operatore aggiunto T^* è dato da

$$(T^* f)(x) = \int_x^1 f(y)\,dy \quad \forall f \in L^2([0,1]).$$

(b) Provare che

$$(T\,T^* f)(x) = \int_0^1 \min\{x,y\} f(y)\,dy \quad \forall f \in L^2([0,1]).$$

(c) Calcolare il raggio spettrale di $T\,T^*$ e la norma di T.

(9) (a) Sia X uno spazio di Banach e sia $A \subset X$ limitato. Provare che A è precompatto se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un sottospazio F_ϵ di X di dimensione finita tale che

$$\operatorname{dist}(x, F_\epsilon) \leq \epsilon \quad \forall x \in A.$$

(b) Sia $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in $\mathbb{R}$ e si consideri l'operatore lineare $T : \ell^2 \to \ell^2$ dato da

$$(T\,u)_n \doteq \lambda_n u_n \quad \forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Utilizzando se necessario il punto (a), provare che T è compatto se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

(10) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$. Provare che la soluzione $x(\cdot)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{1 + t f(x)} \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$ e che

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty.$$