S.I.S.S.A.
Settore di Analisi Funzionale e Applicazioni

Esame di ammissione per i curricula di Analisi Matematica e Matematica Applicata

9 ottobre 2007

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, e *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

1. Sia X uno spazio di Banach reale separabile e riflessivo e sia (φ_n) una successione densa in

$$\left\{\varphi \in X' : \ \|\varphi\| \leq 1\right\} .$$

Si consideri in X il prodotto scalare $(\ |\ )_0$ definito da

$$(x|y)_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \langle \varphi_n, x\rangle \langle \varphi_n, y\rangle .$$

Si dimostri che:

(a) se $\|\ \|_0$ è la norma indotta da tale prodotto scalare, risulta $\|x\|_0 \leq \|x\|$ per ogni $x \in X$;

(b) ogni successione limitata in X ammette una sottosuccessione di Cauchy rispetto alla norma $\|\ \|_0$.

2. Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy \\ \dot{y} = x^2 \end{cases} , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Mostrare che ogni soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e che ha limite per $t \to +\infty$ e per $t \to -\infty$.

3. Sia (f_n) una successione di funzioni convergente a f in $L^1([0,1])$. Si supponga inoltre che la successione sia equilimitata, cioè che esista una costante $M > 0$ tale che $|f_n(x)| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per quasi ogni $x \in [0,1]$. Dimostrare che allora $f_n g \to fg$ in $L^1([0,1])$ per ogni $g \in L^1([0,1])$. Mostrare con un esempio che la conclusione precedente può non essere vera se la successione (f_n) non è equilimitata, anche se le singole funzioni f_n sono limitate.

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)^2 + t \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che la sua soluzione non è definita nell'intervallo $[0,3]$.

5. Sia $(a_{i,j})$ una matrice $n \times n$ tale che per ogni $j \in \{1, ..., n\}$ si abbia:

- $a_{j,j} > 1$
- esiste $k \in \{1, ..., n\}$, $k \neq j$ tale che $a_{k,j} = 1$ e $a_{i,j} = 0$ per ogni $i \notin \{k, j\}$.

Dimostrare che $(a_{i,j})$ non è singolare.

6. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + x + (x^2 + x'^2 - 1)x' = 0 \\ x(0) = a \\ x'(0) = b \end{cases} \tag{1}$$

Dimostrare che:

(a) le soluzioni di (1) sono definite per tutti i $t \geq 0$;

(b) se $a^2 + b^2 > 0$ allora $\lim_{t \to +\infty} (x^2(t) + x'^2(t)) = 1$.

Suggerimento: si consideri la funzione $\rho = x^2 + x'^2$.

7. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile tale che

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{per ogni } x \text{ e } y \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrare che:

(a) f è di classe C^∞;

(b) f è lineare.

Suggerimento: per il punto (a) considerare la convoluzione di f con una funzione non negativa di classe C^∞ e a supporto compatto.

8. Sia (f_n) una successione di funzioni convergente in $L^1(\mathbb{R})$ e sia (E_n) una successione di insiemi misurabili secondo Lebesgue tale che $|E_n| \to 0$. Dimostrare che

$$\int_{E_n} f_n \, dx \to 0 \, .$$

9. Sia $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile tale che

$$\int_0^{+\infty} f(x) x \, dx < +\infty \, .$$

Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f(x+n)\, dx < +\infty\,.$$

10. Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ una soluzione di

$$u_t = u_{xx} - \alpha u\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

tale che $x \mapsto u(x,0)$ sia periodica di periodo 2π e

$$\int_0^{2\pi} u(x,0)\, dx = 0\,.$$

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$t \mapsto \int_0^{2\pi} |u(x,t)|^2\, dx$$

è limitata su $[0,+\infty)$ per ogni scelta delle condizioni iniziali $u(\cdot,0)$.

Suggerimento: scrivere u in serie di Fourier rispetto alla variabile x.