S.I.S.S.A.
Settore di Analisi Funzionale e Applicazioni

Esame di ammissione per i curricula di Analisi Matematica e Matematica Applicata

6 ottobre 2010

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, e *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

1. Siano $f_n, f \in L^1(0,1)$ tali che $f_n \to f$ q.o. in $(0,1)$ e $\|f_n\|_{L^1} \to \|f\|_{L^1}$. Dimostrare che f_n converge a f in $L^1(0,1)$.

2. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \max\{x_1, \ldots, x_n\}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

3. Si consideri l'equazione

$$\ddot{x}(t) + a(t) f(x(t)) = 0,$$

dove $a, f \in C^0(\mathbb{R})$, $a \geq 1$, $f \geq 0$ e

$$\int_0^{+\infty} f(y)\, dy = +\infty.$$

Sia $x(t)$ una qualunque soluzione e sia (t_0, t_1) il suo intervallo massimale di definizione. Dimostrare che $x(t)$ è superiormente limitata per $t \to t_1^-$.

4. Sia $f \in L^1(0,1)$ tale che $f \geq 0$ q.o. in $(0,1)$. Si assuma che esista una costante $c \geq 0$ tale che

$$\int_0^1 (f(x))^n\, dx = c \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},\ n \neq 0.$$

a) Dimostrare che f è la funzione caratteristica di un insieme misurabile.

b) La conclusione precedente è ancora vera se si rimuove l'ipotesi $f \geq 0$?

5. Sia B_k una successione di palle chiuse in $\mathbb{R}^n$ (rispetto alla metrica euclidea) tali che $B_{k+1} \subset B_k$ per ogni k. Si dimostri che $\cap_k B_k$ è un punto oppure una palla chiusa.

6. Dimostrare che tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-y^2} \sin(x^n + y^n), \\ \dot{y} = x^n \sin(x^n + y^n), \end{cases}$$

dove n è un numero naturale fissato, sono definite su $[0, +\infty)$.

7. a) Trovare una funzione φ tale che

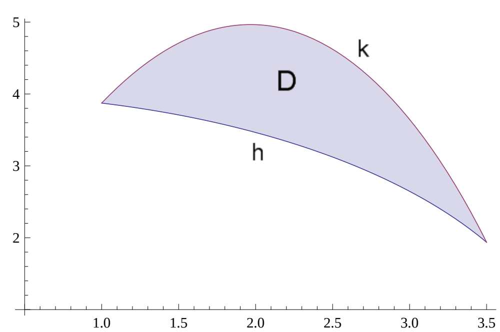
$$\sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2} \geq \varphi(x)(y-x)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Siano $h, k : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 coincidenti agli estremi e tali che $h \leq k$ su $[a,b]$ e il grafico di h è l'arco di un cerchio di raggio R. Provare che

$$L(k) - L(h) \geq \frac{1}{R}|D|,$$

dove $L(k)$ e $L(h)$ sono le lunghezze dei grafici di k e h, e $|D|$ è l'area della regione D compresa tra il grafico di h e il grafico di k.



8. a) Sia f una funzione integrabile su $(0,1)$. Dimostrare che esiste $x \in (0,1)$ tale che

$$f(x) \leq \int_0^1 f(y)\, dy. \tag{1}$$

b) Dato $\varepsilon > 0$, trovare un esempio di funzione f integrabile su $(0,1)$ tale che l'insieme degli $x \in (0,1)$ che soddisfano la (1) abbia misura minore di ε.

9. Sia X l'insieme dei polinomi reali su $\mathbb{R}$. Per ogni $p \in X$ si definisca

$$\|p\| := \sup_{0 \leq t \leq 1} |p(t)|.$$

Dimostrare che:

a) $\|\cdot\|$ è una norma su X;

b) il funzionale $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definito da $\varphi(p) = p(2)$ per ogni $p \in X$ non è continuo.

10. Si consideri il problema iniziale per l'equazione a derivate parziali

$$u_{yy} = u_x, \qquad u(x,0) = \sin(2x).$$

Si esibisca una soluzione 2π-periodica in x tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{y \to +\infty} u(x,y) = 0.$$