S.I.S.S.A.
Settore di Analisi Funzionale e Applicazioni

Esame di ammissione per i curricula di Analisi Matematica e Matematica Applicata

7 settembre 2011

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, e *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

1. Poniamo $L^p = L^p(0,1)$, per $p \in [1,\infty]$. Provare che l'inclusione canonica $L^\infty \to L^1$ è continua ma non compatta.
Esistono $p, q \in [1,\infty]$ con $p < q$ tali che l'inclusione $L^q \to L^p$ sia compatta?

2. Per $t \geq 0$, si trovino tutte le soluzioni del problema di Cauchy (definito per $x \geq 0$ e $|y| \leq 1$)

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x}\ y \\ \dot{y} = \sqrt{1-y^2} \end{cases} \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

3. Sia $f \in L^1(0,\infty)$ una funzione monotona. Dimostrare che

$$\lim_{x\to\infty} x f(x) = 0.$$

4. Sia $f \in L^2(0,1)$. Dimostrare che $f(t) = t$ q.o. in $(0,1)$ se e solo se

$$\int_0^1 t^n f(t)\, dt = \frac{1}{n+2} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

5. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme aperto non vuoto tale the

$$\int_A \phi'(x) dx \leq 0$$

per tutte le funzioni $\phi \in C^1_c(\mathbb{R})$ con $\phi \geq 0$. Dimostrare che A è illimitato.
Suggerimento: considerare prima il caso $A = (a,b)$.

6. Sia $f \in C(\mathbb{R})$ tale che

$$f(0) \neq -2 \quad \text{e} \quad \int_0^1 f(t) = 0.$$

Dimostrare che esiste $\epsilon > 0$ tale the l'equazione

$$\int_x^1 f(t)dt = 2x$$

ha un'unica soluzione per $|x| < \epsilon$.

7. Sia (f_n) una successione in $L^2(\mathbb{R})$ e siano $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$. Supponiamo che

$$f_n \rightharpoonup f \text{ debolmente in } L^2(\mathbb{R}),$$
$$f_n^2 \rightharpoonup g \text{ debolmente in } L^1(\mathbb{R}).$$

Dimostrare che $g \geq f^2$ q.o. in $\mathbb{R}$.

8. Sia y una soluzione dell'equazione

$$y''(t) = y(t) - y(t)^3.$$

Supponiamo che $y \in L^2(\mathbb{R})$ e $y' \in L^2(\mathbb{R})$.

(a) Dimostrare che $|y(t)| \leq \sqrt{2}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(b) Dimostrare che o $y(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ oppure $y(t)$ ha segno costante.

9. Sia $f \in C([0,1])$. Calcolare

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \int_0^1 \cosh(tf(x))dx.$$

10. Sia $(a_n)_{n \geq 1}$ una successione non decrescente di numeri non negativi che soddisfano

$$a_{m \cdot n} \leq a_m + a_n \qquad \text{per ogni } n, m \geq 1.$$

Dimostrare che esiste $C > 0$ tale che

$$a_n \leq C \log n \qquad \text{per ogni } n \geq 2.$$

Suggerimento: considerare prima il caso $n = 2^k$.