S.I.S.S.A.
Settore di Analisi Funzionale e Applicazioni

Esame di ammissione per i curricula di Analisi Matematica e Matematica Applicata

6 settembre 2012

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, e *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

1. Si considerino in $C([0,1],\mathbb{R})$ le funzioni

$$f_r(x) := \begin{cases} 0 & 0 \le x \le r, \\ \frac{x-r}{1-r} & r < x \le 1, \end{cases}$$

al variare di $r \in [0,1]$. Dimostrare che la chiusura del convessificato di $\{f_r, r \in [0,1]\}$ in $C([0,1],\mathbb{R})$ é l'insieme delle funzioni convesse, crescenti tali che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

2. Ci consideri l'equazione differenziale a derivate parziali

$$u_t + u_x = u_{xx}, \quad t \in (0,\infty),\ x \in (0,1),\ u \in \mathbb{R}.$$

(a) Scrivere l'unica soluzione $\bar{u}(x)$ indipendente dal tempo e di classe $C^2([0,1],\mathbb{R})$ tale che

$$u(0) = 1, \qquad u(1) = 0.$$

(b) Dimostrare che tutte le altre soluzioni $u(t,x)$ di classe $C^2([0,\infty) \times [0,1],\mathbb{R})$ con gli stessi dati al bordo

$$u(t,0) = 1, \qquad u(1) = 0$$

convergono a $\bar{u}(x)$ in norma C^0 quando $t \to \infty$.

3. Sia f una funzione continua strettamente monotona definita nel segmento $[a,b]$. Per ogni $p > 0$, si consideri il punto x_p tale che

$$f^p(x_p) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^p(x)\, dx.$$

Trovare $\lim_{p \to +\infty} x_p$.

4. Trovare una mappa $f : [0,1] \to [0,1]$ con le proprietà seguenti:

(a) f e' una corrispondenza biunivoca tra i punti di $[0,1]$ e l'intervallo aperto $(0,1)$,

(b) $f(x) = x$ per quasi tutti gli $x \in [0,1]$.

5. Si consideri il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = 15x + x^2 + y - 3x^3; \\ \dot{y} = 4y^2 - x - 5y^3. \end{cases}$$

Si dimostri che ogni soluzione del sistema rimane uniformemente limitata per tempi positivi.

6. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(t) = f(t^n); \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che se esiste $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tale che $f_n \to g$ uniformemente su $[0,1]$ allora f è costante.

7. Sia X uno spazio di Hilbert separabile, sia (e_n) un sistema ortonormale completo in X e sia (λ_n) una successione limitata di numeri complessi.

(a) Dimostrare che esiste un unico operatore lineare continuo $A \colon X \to X$ tale che $Ae_n = \lambda_n e_n$ per ogni n.

(b) Dimostrare che A è compatto se e solo se $\lambda_n \to 0$ per $n \to \infty$.

8. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e siano F, $G \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$F(x) := \int_x^{x+1} f(t)\, dt \qquad \text{e} \qquad G(x) := \left| \int_x^{x+1} f(t)\, dt \right|.$$

(a) Dimostrare che G ha un punto di massimo su $\mathbb{R}$.

(b) Mostrare con un esempio che non sempre F ha un punto di massimo su $\mathbb{R}$.