SISSA – Area Matematica

Esame di ammissione per il corso di Analisi Matematica, Modelli e Applicazioni

5 Settembre 2017

Il candidato risolva CINQUE dei seguenti problemi, e *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

1 Analisi Matematica

1.

(a) Sia V un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert H e $\ell : V \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo. Dimostrare che esiste una unica estensione di ℓ a tutto H che ne preserva la norma.

(b) Si dia un esempio di sottospazio chiuso W di $L^1([0,1])$ e di un funzionale $\ell : W \to \mathbb{R}$ lineare e continuo che ammette almeno due estensioni a tutto $L^1([0,1])$ che ne preservano la norma.

2.

(a) Sia $1 \le p_1 \le p \le p_2 \le \infty$ e

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}\,, \quad 0 \le \alpha \le 1\,.$$

Si provi che se $f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$, allora $f \in L^p$ e vale la disuguaglianza

$$\|f\|_{L^p} \le \|f\|_{L^{p_1}}^{\alpha} \|f\|_{L^{p_2}}^{1-\alpha}\,.$$

(b) Sia f_n una successione di funzioni limitata in $L^\infty([0,1])$ con $f_n \to f$ in $L^2([0,1])$. Si deduca che f sta in $L^\infty([0,1])$ e che f_n converge ad f in $L^p([0,1])$ per ogni $2 \le p < +\infty$.

3. Sia E un sottospazio chiuso di $L^p([0,1])$ con $1 \le p < +\infty$ tale che $E \subset L^\infty([0,1])$.

(a) Si dimostri che E è completo per entrambe le norme $\|\ \|_{L^p}$ e $\|\ \|_{L^\infty}$.

(b) Si provi che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|u\|_{L^\infty} \le C\|u\|_{L^p}\,, \quad \forall u \in E.$$

4. Sia $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di operatori non nulli, autoaggiunti, ovunque definiti, su uno spazio di Hilbert H tali per cui per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) T_n, \quad \mathrm{Im}(T_n) \subset \mathrm{Im}(T_{n+1}) \quad \text{and} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(T_n) = H.$$

(a) Si provi che ogni operatore T_n è limitato e di norma operatoriale $\|T_n\| = 1 + \frac{1}{n}$.

(b) Si provi che la successione $\{T_n\}_n$ converge fortemente all'identità su H, cioè che per ogni $x \in H$ si ha $T_n x \to x$.

5. Sia $T : H \to H$ un operatore *compatto* e autoaggiunto su uno spazio di Hilbert H con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio con tutti gli zeri reali e tale che

$$p(T) = 0.$$

(a) Si dimostri che se H ha dimensione infinita, allora 0 è un autovalore di T.

(b) Si assuma che $p(s) > 0$ per ogni $s < 0$. Si dimostri che per ogni $x \in H$ si ha $\langle x, Tx \rangle \geq 0$.

6. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = (\sin t)^2 - u(t)^2 \\ u(0) = -1. \end{cases} \tag{1}$$

Sia $u :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ l'unica soluzione massimale di (1). Si dimostri che $\beta < +\infty$.

7. Siano X, Y due spazi di Banach con X riflessivo. Sia $X \subseteq Y$ e si assuma che l'immersione $X \hookrightarrow Y$ sia continua. Si consideri $y \in Y$ e $\{x_n\}_n$ una successione limitata in X. Si dimostri che se $x_n \rightharpoonup y$ debolmente in Y allora $y \in X$ e $x_n \rightharpoonup y$ debolmente in X.

8. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1, limitate e sia $f(0) = 0$. Si dimostri che per ogni $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, il seguente sistema ha una soluzione:

$$\begin{cases} u''(t) = f(\epsilon u(t)) + \epsilon g(t) \\ u(0) = 0 = u(1). \end{cases}$$

(Suggerimento: si usi il Teorema della Funzione Implicita.)

9.

(a) Si dimostri che se tutti gli zeri di un polinomio complesso p stanno nel semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{im}(z) > 0\}$, allora la derivata di p non può annullarsi nell'origine.

(b) Si dimostri che ogni punto critico di un polinomio complesso p (cioè un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $p'(z_0) = 0$) sta nell'inviluppo convesso degli zeri di p.

10. Si costruisca una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali positivi, con la proprietà che $a_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$ e tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty.$$

2 Analisi numerica

11. Si considerino le equazioni di Navier-Stokes stazionarie con condizioni al contorno di Dirichlet non omogenee.

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}, & \text{su } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

dove $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ sono due funzioni vettoriali note, e $\mathbf{u}$ e p sono le incognite velocità e pressione, rispettivamente.

(a) Si scriva la formulazione debole del problema, specificando le opportune ipotesi.

(b) Mostrare che $\int_\Gamma \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$ è una condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione debole, in modo da soddisfare una condizione di compatibilità.

(c) Introdurre e discutere approssimazioni stabili a elementi finiti di (2).

12. Si consideri il seguente problema di diffusione-trasporto-reazione

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u + \gamma u = f, \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = \varphi, \ \text{su } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, \ \text{su } \Gamma_N, \end{cases} \tag{3}$$

dove $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ e $\Gamma_N \subset \partial\Omega$ sono due insiemi disgiunti, non vuoti e tali che $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$.

(a) Quali sono le ipotesi su $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$, $\mathbf{b} = (b_1(x, y), b_2(x, y))^T$, $\gamma = \gamma(x, y)$, $f = f(x, y)$ e $\varphi = \varphi(x, y)$ che garantiscono esistenza ed unicità della soluzione $u = u(x, y)$?

(b) Introdurre una approssimazione Galerkin elementi finiti di (3).

(c) Si supponga che $|b| \gg \varepsilon$. Introdurre opportuni metodi di stabilizzazione (e.g. SUPG), discutendo vantaggi e svantaggi rispetto al classico metodo di Galerkin elementi finiti.

13. Si consideri un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ed il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_{(y,u)\in Y\times U} \left\{ J(y,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (y-y_d)^2 + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega u^2 \right\} \tag{4}$$

soggetto a

$$\begin{cases} -\Delta y = f + u, & \text{in } \Omega, \\ y = 0, & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

dove y_d e f sono funzioni assegnate, $y \in Y$ e $u \in U$ sono la soluzione di stato ed il controllo, rispettivamente.

(a) Introdurre una formulazione debole di (5), della seguente forma:

$$\text{dato } u \in U, \quad \text{trovare } y \in Y \quad \text{tale che} \quad a(y,q) = c(u,q) + F(q), \quad \forall q \in Y,$$

per opportune forme bilineari $a(\cdot,\cdot)$ e $c(\cdot,\cdot)$, e una opportuna forma lineare $F(\cdot)$. Specificare uno spazio funzionale per f, e anche lo spazio Y della variabile di stato e lo spazio U del controllo. Discutere la buona posizione del problema ottenuto.

(b) Riscrivere il funzionale costo $J(y,u)$ come

$$J(y,u) = \frac{1}{2}m(y-y_d, y-y_d) + \frac{\alpha}{2}n(u,u),$$

per opportune forme bilineari $m(\cdot,\cdot)$ e $n(\cdot,\cdot)$. Specificare ulteriori ipotesi su y_d, se necessarie.

Sia $\mathcal{J}(u)$ il funzionale costo ridotto ottenuto come $\mathcal{J}(u) = J(y(u),u)$, essendo $y(u)$ l'unica soluzione debole di (5) sotto le ipotesi in a), e si denoti con $\mathcal{J}'(u) \in U'$ la sua derivata, essendo U' lo spazio duale di U. E' possibile mostrare che

$$\langle \mathcal{J}'(u), v \rangle = \alpha\, n(u,v) - c(v, p(u))$$

dove $\langle \cdot,\cdot \rangle$ denota il prodotto di dualità tra U' e U, e $p(u)$ è la soluzione del seguente *problema aggiunto*

$$\text{dato } u \in U, \quad \text{trovare } p \in Y \quad \text{tale che} \quad a(z,p) = -m(y-y_d, z), \quad \forall z \in Y.$$

(c) Discutere un metodo numerico basato su elementi finiti per risolvere il problema di controllo ottimo (4)-(5), mediante una strategia iterativa (ad esempio, di tipo gradiente) o un approccio di tipo monolitico (ad esempio, punto sella).

14. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, per $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
Si consideri il seguente metodo di Richardson stazionario

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$$

dove α è un parametro di rilassamento, P un precondizionatore di A e $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$.

(a) Quali sono le condizioni su A and P che garantiscono la convergenza di $\mathbf{x}^{(k)}$ a $\mathbf{x}$?

(b) Si descriva come scegliere α in modo da avere la migliore convergenza possibile di $\mathbf{x}^{(k)}$ a $\mathbf{x}$.

15. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione regolare e sia α una delle sue radici (i.e., $f(\alpha) = 0$).

(a) Si introduca il metodo di Newton per risolvere numericamente $f(x) = 0$.

(b) Si riformuli il metodo di Newton come metodo di punto fisso $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$.

(c) Definire la nozione di convergenza per il metodo in b). Quali sono le ipotesi su g (e, eventualmente, $x^{(0)}$) che garantiscono la convergenza del metodo, e con quale ordine? Si tengano in considerazione anche casi speciali, come $g'(\alpha) = 0$.

(d) Si applichi il risultato in c) al metodo di Newton. In quale modo la molteplicità di α influisce sull'ordine di convergenza?

3 Meccanica del continuo

16. Si consideri if flusso bidimensionale, non-stazionario di un fluido il cui campo di velocità è dato da $\mathbf{v}(x, y, t) = xy\,\mathbf{e}_1 + \exp(-5x^3t)\mathbf{e}_2$, dove $\mathbf{e}_1$-$\mathbf{e}_2$ è una base ortonormale in $\mathbb{R}^2$, $t > 0$ è il tempo e x, y sono le variabili spaziali. Assegnato il campo di temperatura $T(x, y, t) = 2x + y^2 + A\sin(t)$, si determini la costante A tale per cui il tasso istantaneo di variazione temporale della temperatura delle particelle di fluido che attraversano il punto $x = 0$, $y = 1$ si annulli per $t = 2k\pi$, con k intero positivo. Per il valore di A appena trovato, si calcoli il tasso di variazione temporale del campo di temperatura nello stesso punto dello spazio e per gli stessi tempi.

17. Un corpo cilindrico di lunghezza L e sezione trasversale circolare di raggio R è soggetto a trazioni $\mathbf{t} = \sigma\mathbf{n}$, $\sigma > 0$, dove $\mathbf{n} = \pm\mathbf{e}_1$ è la normale unitaria uscente rispetto alle basi del cilindro ed $\mathbf{e}_1$ è il versore diretto lungo l'asse del cilindro. Nell'ambito della teoria dell'elasticità lineare e nell'ipotesi di risposta costitutiva omogenea isotropa ed incomprimibile per il corpo, si determinino i campi di sforzo, pressione e deformazione infinitesima. In aggiunta, si calcoli il campo di spostamento a meno di moti rigidi.

18. Si consideri un'asta elastica, inestensibile e rettilinea (in assenza di carichi applicati) di lunghezza L e sezione trasversale circolare di raggio costante R. Sia l'asta in equilibrio sotto l'azione di due momenti flettenti di modulo M applicati alle sue estremità. Si calcoli il valore di M tale per cui l'asta si deforma in un anello chiuso (il momento di inerzia di una sezione trasversale circolare di raggio R è pari a $\pi R^4/4$).

19. Una sfera di raggio iniziale R costituita da un materiale isotropo elastico lineare è immersa in un fluido a pressione p. Usando la teoria dell'elasticità lineare, calcolare il valore del bulk modulus del materiale in modo tale che la variazione relativa del raggio della sfera (rispetto al valore iniziale) sia pari all'1%.

20. Sia $\mathbf{A}$ un tensore invertibile del secondo ordine. Si calcoli la derivata del suo determinante $\det(\mathbf{A})$ rispetto a $\mathbf{A}$.