Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di ammissione alle borse per la Laurea Magistrale in Matematica

Prova scritta del 7 settembre 2017

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1-5) ed uno nel gruppo B (esercizi 6-10). Il candidato indichi chiaramente sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Gruppo A

1. Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) := \int_1^x \Big(\frac{\pi}{2} - \arctan t\Big) \tanh(t) \sin(t) dt$$
$$g(x) := \int_1^x \Big(\frac{\pi}{2} - \arctan t\Big) \tanh(t) |\sin(t)| dt.$$

a. Dimostrare che il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ esiste ed è finito.

b. Determinare il limite di $g(x)$ per $x \to +\infty$

2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + x\,y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y - x^2 \end{cases}$$

a. Dimostrare che le sue soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{t \to +\infty} \big(x(t), y(t)\big) = 0.$$

b. Dimostrare che se $(x(0), y(0)) \neq (0, 0)$ allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\big(x(t), (y(t)\big) \neq (0, 0).$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che:

a. per ogni $x \in \mathbb{R}$ il limite della successione $n \mapsto \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}(x)$ esiste

b. tale limite non dipende da x.

(suggerimento: distinguere i casi in cui $f(x) > x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $f(x) = x$ per un qualche $x \in \mathbb{R}$)

4. Si consideri la regione $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definita come

$$\Omega := D((0,0,0),1) \cap D((1,1,1),1),$$

dove $D((x_0, y_0, z_0), r)$ è la palla di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio r in $\mathbb{R}^3$.

a. Calcolare il volume di Ω

b. Calcolare

$$\int_{\Omega} (x + 2y + z) dV.$$

c. Detto $\partial\Omega$ il bordo di Ω calcolare

$$\int_{\partial\Omega} (x + 2y + z) dS.$$

5. Denotiamo con $(0,1)$ l'intervallo aperto e sia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\text{per ogni } x \in (0,1) \text{ si ha che } \lim_{n\to\infty} f\left(\tfrac{x}{n}\right) = 0. \tag{1}$$

a. possiamo concludere che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$?

b. la risposta cambia se assumiamo, in aggiunta a (1), che f è continua?

Gruppo B

6. Un punto materiale di massa m si muove sulla superficie liscia di una sfera di raggio R, soggetto alla gravità ed attratto dall'asse z con una forza elastica di costante k.

a. Si scrivano la Lagrangiana del sistema e le equazioni del moto di Lagrange. Si determinino due costanti del moto e se ne spieghi il significato fisico. Si proceda poi allo studio qualitativo del moto.

b. Si determinino i dati iniziali tali che il punto si muova sul parallelo di colatitudine $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (l'angolo che il raggio vettore relativo al punto forma con l'asse polare).

7. Sia $\mathcal{P}_n \subset \mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi reali monici di grado n. Si consideri l'applicazione $F\colon M(n,\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n$ che a una matrice reale $A \in M(n,\mathbb{R})$ associa il suo polinomio caratteristico $p_A(x) \in \mathcal{P}_n$,

$$F(A) = p_A(x).$$

Identifichiamo in modo naturale $\mathcal{P}_n$ con $\mathbb{R}^n$ e $M(n,\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{n^2}$.

a. Supponendo che $A \in M(n,\mathbb{R})$ abbia autovalori reali distinti, mostrare che F è una sommersione locale nel punto A. Supponendo che A sia diagonalizzabile con autovalori reali non tutti distinti, mostrare che F non è una sommersione locale nel punto A.

b. Fissato un vettore di numeri reali distinti $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, sia $V_\lambda \subset M(2,\mathbb{R})$ il sottoinsieme formato dalle matrici con autovalori dati dalle entrate di λ. Dimostrare che V_λ è una sottovarietà regolare di $M(2,\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

c. Determinare lo spazio tangente alla sottovarietà $V_\lambda \subset M(2,\mathbb{R})$ nel punto dato dalla matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

8. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regolare ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva nel piano yz di equazione $(y-2)^2 + z^2 = 1$. Siano π_1 e π_2 le applicazioni differenziabili $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ date rispettivamente da $\pi_1(x,y,z) = (x,y)$, $\pi_2(x,y,z) = (x,z)$.

a. Determinare il sottoinsieme $S_1 \subset S$ dato dai punti critici dell'applicazione π_1 ristretta a S e il sottoinsieme $S_2 \subset S$ dato dai punti critici dell'applicazione π_2 ristretta a S.

b. Dimostrare che per una qualunque componente connessa C di S_1 il complementare $S \backslash C$ è omotopicamente equivalente al cerchio S^1. Dimostrare che S_2 è connesso per archi e che ogni componente connessa di $S \setminus S_2$ è contraibile.

c. Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(S_2)$.

9. Sia $a \geq 1$ un parametro reale. Si considerino le superfici regolari $S_1(a)$, $S_2(a)$ in $\mathbb{R}^3$ espresse in forma cartesiana rispettivamente da

$$S_1(a) = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 = 1 \right\},$$
$$S_2(a) = \left\{ x^2 + y^2 - \frac{z^2}{a^2} = -1 \right\}.$$

a. Mostrare che $S_1(a)$, $S_2(a)$ sono superfici di rotazione e scrivere le corrispondenti parametrizzazioni.

b. Per $i = 1, 2$, calcolare l'estremo superiore $\kappa_{\sup}(S_i(a))$ e inferiore $\kappa_{\inf}(S_i(a))$ della curvatura Gaussiana di $S_i(a)$. Dire se tali valori sono raggiunti su $S_i(a)$ e in tal caso specificare i punti di massimo e minimo.

c. Siano $a, a' \geq 1$ due diversi valori del parametro. Dire se due superfici $S_1(a), S_1(a')$, rispettivamente $S_2(a), S_2(a')$ possono essere tra loro isometriche. Motivare la risposta.

d. Per $i = 1, 2$, si indichi con $\kappa(S_i(a)) \colon S_i \to \mathbb{R}$ la funzione data dalla curvatura Gaussiana e con $d\sigma(S_i(a))$ l'elemento d'area di $S_i(a)$. Mostrare che l'integrale

$$\int_{S_i(a)} \kappa(S_i(a)) d\sigma(S_i(a))$$

è ben definito e calcolarlo.

10. Si discutano i seguenti quesiti motivando accuratamente le risposte.

a. Se A è una matrice complessa $n \times n$ A tale che $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ per $k = 1, 2, \ldots$, che tipo di matrice è A?

b. E' vero che una matrice quadrata complessa A è sempre simile alla sua trasposta A^T?